



**SNPTEE
SEMINÁRIO NACIONAL
DE PRODUÇÃO E
TRANSMISSÃO DE
ENERGIA ELÉTRICA**

GOP 24
14 a 17 Outubro de 2007
Rio de Janeiro - RJ

GRUPO IV

GRUPO IX - GRUPO DE ESTUDO DE OPERAÇÃO DE SISTEMAS ELÉTRICOS

TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE CENÁRIOS DE VAZÕES APLICADAS AO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE CURTO PRAZO

OLIVEIRA, W. L.^{1,2*}; SAGASTIZÁBAL, C.^{1,2}; PENNA, D. D. J.¹; MACEIRA, M. E. P.^{1,3}; DAMÁZIO, J. M.^{1,3}

- 1 - CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA – CEPEL**
- 2 - INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA – IMPA**
- 3 – UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - UERJ**

RESUMO

O problema de planejamento da operação de curto prazo é modelado como um problema estocástico multi-estágio. Variáveis incertas, como as vazões afluentes aos aproveitamentos hidroelétricos, são representadas por meio de uma árvore de cenários com probabilidades associadas. Porém, quando se utilizam árvores de mais de um período temporal, a complexidade do problema de otimização resultante para o Sistema Interligado Nacional torna difícil a resolução em tempos computacionais razoáveis. Neste trabalho utilizam-se medidas probabilísticas para definir distâncias entre árvores de cenários, de maneira a obter árvores de portes menores que representem adequadamente o processo estocástico das afluições hidrológicas e sejam satisfatórias, tanto em termos de esforço computacional quanto em termos de qualidade da solução do problema de otimização.

PALAVRAS-CHAVE

Árvore de Cenários, Otimização Estocástica, Redução de Cenários, Métrica de Fortet-Mourier, Planejamento Energético de Curto Prazo.

1.0 - INTRODUÇÃO. MOTIVAÇÃO.

Para o Sistema Interligado Nacional (SIN), o modelo de planejamento energético de curto prazo desenvolvido pelo CEPEL, DECOMP [1,2], precisa representar de forma suficientemente acurada as incertezas nas vazões afluentes aos aproveitamentos hidroelétricos. Estas incertezas são introduzidas no problema por meio de uma árvore de realizações possíveis do evento incerto, ou *cenários*, onde cada cenário tem uma certa probabilidade associada. Porém, como acontece para o SIN, se, com o intuito de se representar melhor as incertezas, aumenta-se o número de cenários, o problema de otimização estocástica resultante pode se tornar inviável em termos de tempo computacional.

O modelo GEVAZP [3,4,5], desenvolvido pelo CEPEL para gerar séries sintéticas de vazões afluentes, define cenários para o modelo DECOMP. Este modelo trabalha com um horizonte temporal de dois meses, sendo o primeiro mês discretizado em etapas semanais que não consideram a incerteza das vazões. Já no segundo mês, utilizam-se atualmente árvores com mais de cem cenários. Com o intuito de construir uma função de custo futuro mais robusta, aplicando o algoritmo de programação dinâmica dual estocástica, deseja-se estender o horizonte temporal do modelo. Para tanto, deve-se contar com um número mínimo de cenários que representem a incerteza das vazões afluentes. O objetivo deste trabalho é apresentar uma técnica de redução da dimensionalidade da árvore de cenários gerada pelo modelo GEVAZP, de modo que a árvore reduzida obtida represente acuradamente o processo estocástico de afluições hidrológicas, e que seja viável em termos de tempo computacional para o modelo DECOMP.

A escolha de um subgrupo de cenários suficientemente representativos pode ser feita tomando-se como critério a boa qualidade da solução obtida pelo problema de otimização “reduzido”. A medida probabilística chamada de *Fortet-Mourier* [6], utilizada neste trabalho para definir uma árvore reduzida ótima de cenários, garante otimalidade em dois sentidos, descritos a seguir:

- Estabilidade, no sentido que pequenas variações na árvore original resultam em pequenas variações da árvore reduzida ótima obtida.
- Proximidade da árvore original, em termos de valores ótimos dos problemas de otimização correspondentes.

O que se espera é que essas propriedades auxiliem a boa aderência ao processo estocástico considerado.

Este trabalho está organizado em 4 seções, contendo, respectivamente, a introdução, a formulação do problema, os resultados numéricos, e as conclusões. A subseção 2.1 define distância de Fortet-Mourier (entre a árvore original e uma árvore reduzida qualquer) como o valor ótimo de um problema de transporte. A minimização desta distância sobre todas as possíveis árvores reduzidas define o chamado *problema de redução de cenários* (PRC), descrito na subseção 2.2, e assunto central deste trabalho. O algoritmo numérico utilizado para resolver o PRC é apresentado na subseção 2.3. A seção 3 contém o estudo de caso com resultados numéricos. Os resultados obtidos demonstram a excelente aderência em termos estatísticos da árvore obtida mediante a técnica proposta ao processo estocástico representado pela árvore original.

2.0 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Já foi mencionado que em problemas estocásticos a tomada de decisões precisa de um compromisso entre dois interesses conflitantes. De um lado, necessita-se de uma boa discretização do processo estocástico que se deseja representar; por outra parte, o problema de otimização resultante deve ser viável em termos de tempo computacional. O objetivo é obter decisões ótimas que estejam aderentes ao processo estocástico considerado, em tempos computacionais razoáveis.

Em geral, a estratégia adotada para modelar um problema estocástico é usar como função objetivo o valor esperado dos custos. Para isto, devem-se conhecer quais são as possíveis realizações futuras de todas as variáveis aleatórias envolvidas no problema, ou gerar cenários representativos garantindo uma boa aderência. A cada possibilidade de ocorrência do evento aleatório é atribuída uma probabilidade.

Resulta assim o problema de otimização

$$\min_{x \in X} E_P f(x) \quad (2.1)$$

onde, dada a função $f : \Theta \times R^n \rightarrow R$ (os custos de geração e déficit), a função objetivo se escreve

$$E_P f(x) = \sum_{i=1}^N f(w_i, x) p_i,$$

sendo:

$X \subset R^n$ o conjunto viável das variáveis de operação (geração térmica, intercâmbios de energia entre os subsistemas, volumes armazenados nos reservatórios);

$\Theta \subset R^T$ o espaço amostral com N cenários w_i (de vazões afluentes às usinas hidroelétricas); e

P , uma distribuição de probabilidades que associa a cada cenário w_i uma probabilidade p_i , para $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$.

Se o número de cenários N é muito grande, a resolução direta de (2.1) não é possível. Procura-se um conjunto de N_{red} cenários representativos, com N_{red} muito menor que N . Para determinar os melhores cenários $\{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_{N-N_{red}}}\}$ a serem descartados, haverá duas variáveis a definir de maneira ótima

- $J = \{j_1, \dots, j_{N-N_{red}}\}$, o conjunto complementar de índices de $N-N_{red}$ cenários a serem descartados em relação ao conjunto de índices dos cenários originais, $I = \{1, 2, \dots, N\}$; e
- Q , a nova distribuição de probabilidades.

O problema de otimização reduzido, que utiliza como função objetivo o valor esperado definido por J e Q

$$E_{J,Q} f(x) = \sum_{l \in I \setminus J} f(w_l, x) q_l,$$

é formalizado pela expressão

$$\min_{x \in X} E_{J,Q} f(x). \quad (2.2)$$

Assim sendo, para cada escolha diferente de J e Q , haverá associado um problema de otimização (2.2) diferente. O valor ótimo do par (J^*, Q^*) é determinado de modo que (2.2) seja próximo ao problema (2.1) tanto em termos de valor ótimo quanto de solução encontrada. Mais precisamente, sejam

$$V(P) = \inf \{E_P f(x) : x \in X\}$$

e

$$V(Q^*) = \inf \{E_{J^*, Q^*} f(x) : x \in X\}$$

os valores ótimos dos problemas original (2.1) e reduzido (2.2), respectivamente. Dado $\varepsilon \geq 0$, as correspondentes soluções ε -ótimas são dadas pelos conjuntos

$$S_\varepsilon(P) = \{x \in X; E_P f(x) \leq V(P) + \varepsilon\}$$

e

$$S_\varepsilon(Q^*) = \{x \in X; E_{J^*, Q^*} f(x) \leq V(Q^*) + \varepsilon\}.$$

De modo geral, procura-se obter um conjunto de índices $J^* = \{j_1, \dots, j_{N-N_{red}}\}$ e uma distribuição de probabilidades Q^* próxima de P satisfazendo as relações

$$|V(P) - V(Q^*)| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad S_\varepsilon(Q^*) \subset S_\varepsilon(P) + B(x^*, \rho), \quad (2.3)$$

onde x^* resolve (2.1) e $B(x^*, \rho)$ é a bola centrada em x^* com raio $\rho > 0$ pequeno.

Um critério natural para garantir a proximidade dos problemas (2.1) e (2.2) consiste em minimizar a distância entre os valores funcionais dos respectivos problemas de otimização

$$\min_{J, Q} |E_P f(x) - E_{J, Q} f(x)| \quad (2.4)$$

Este problema motiva a utilização da métrica de Fortet-Mourier, apresentada a seguir. O Teorema 1 em [7] mostra que com esta métrica as importantes propriedades (2.3) valem, ou seja, mantém-se próximos tanto os valores ótimos (custos de operação e déficit) quanto as soluções encontradas (gerações, intercâmbios, volumes armazenados). Assim sendo, resulta um problema de otimização reduzido *próximo* do problema original, que preserva suas principais características.

2.1 A Métrica de Fortet-Mourier

Dados dois cenários w e w' , considera-se que eles estão *próximos* quando a distância entre eles, dada pela norma da diferença, $|w - w'|$, é suficientemente pequena, podendo ser utilizada uma norma $|\cdot|$ arbitrária.

A fim de motivar a definição de métrica de Fortet-Mourier, observa-se que, quando a função de custos $f(w, x)$ é Lipschitz contínua na variável w e X é um conjunto limitado, tem-se a desigualdade $|f(w, \cdot) - f(w', \cdot)| \leq L |w - w'|$, que pode ser reescrita como $|\frac{1}{L} f(w, \cdot) - \frac{1}{L} f(w', \cdot)| \leq |w - w'|$. Com esta interpretação, tem-se que a função de custos “pertence” ao conjunto

$$\Phi = \left\{ \varphi : \Theta \rightarrow R : |\varphi(w) - \varphi(w')| \leq |w - w'| \right\}.$$

Para determinar a distância entre P e Q a *métrica de Fortet-Mourier*, denotada por $d(J, Q)$, utiliza este conjunto

$$d(J, Q) = \sup_{\varphi \in \Phi} |E_P \varphi(x) - E_{J, Q} \varphi(x)|. \quad (2.5)$$

O problema de redução de cenários, descrito a seguir, determina o par ótimo (J^*, Q^*) minimizando esta métrica.

2.2 O problema de redução de cenários

O problema de fazer a escolha de (J^*, Q^*) é chamado de problema de redução de cenários. Matematicamente, este problema se expressa como a minimização da métrica de Fortet-Mourier nas variáveis J e Q , atendendo às restrições de Q ser uma distribuição de probabilidades e J ter a cardinalidade desejada ($\#J = N - N_{red}$)

$$\min_{J, Q = \{q_1, \dots, q_{N_{red}}\}} \{d(J, Q) : q_l \geq 0, \sum_{l \in I \setminus J} q_l = 1, \#J = N - N_{red}\}. \quad (2.6)$$

Este problema pode ser resolvido em dois níveis. Um nível superior, na variável J

$$\min_J \{c(J) : J \subset I, \#J = N - N_{red}\},$$

e um nível inferior, que minimiza a métrica $d(J; Q)$ na variável Q , para cada conjunto J fixo

$$c(J) = \min_{Q = \{q_1, \dots, q_{N_{red}}\}} \{d(J; Q) : q_l \geq 0, \sum_{l \in I \setminus J} q_l = 1\}.$$

A formulação do PRC em dois níveis tem o intuito de desacoplar as variáveis J e Q e obter uma formulação explícita para o problema de segundo nível (que define a função objetivo $c(\cdot)$ do primeiro nível), descrita a seguir.

Usando a expressão (2.5) e a definição de valor esperado, tem-se que

$$c(J) = \min_{Q = \{q_1, \dots, q_{N_{red}}\}} \left\{ \left[\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \sum_{i \in I} p_i \varphi(w_i) - \sum_{i \in I \setminus J} q_i \varphi(w_j) \right| \right] : q_l \geq 0, \sum_{l \in I \setminus J} q_l = 1 \right\}.$$

Assim sendo, para cada conjunto fixo J , o problema acima é afim na variável $Q = (q_1, \dots, q_{N_{red}})$. Explorando as relações de dualidade em programação linear para este problema, pode-se provar (Teorema 2 em [7]) que o valor $c(J)$ possui uma expressão explícita dada por

$$c(J) = \sum_{j \in J} p_j \min_{l \in I \setminus J} |w_j - w_l|,$$

onde o mínimo é atingido em

$$q_l = p_l + \sum_{j \in J_l} p_j, \text{ para cada } l \in I \setminus J, \quad (2.7)$$

sendo $J_l = \{j \in J : l = l(j)\}$ e $l(j) \in \arg \min_{l \in I \setminus J} |w_j - w_l|$, para cada $j \in J$ (Seção 3 em [7]).

Com este resultado crucial, o PRC (2.6) passa a ter a seguinte estrutura. O conjunto ótimo de índices J^* resolve

$$\min_J \left\{ \sum_{j \in J} p_j \min_{l \in I \setminus J} |w_j - w_l| : J \subset I, \#J = N - N_{red} \right\}, \quad (2.8)$$

entanto que a probabilidade Q^* é dada pela expressão (2.7), escrita com $J = J^*$.

2.3 Técnicas heurísticas para selecionar o conjunto ótimo de índices

Com a formulação (2.8), o PRC consiste em conferir todos subconjuntos J de I com cardinalidade $N - N_{red}$; um problema de natureza combinatória que, dependendo do número de cenários, torna inviável a conferência de todas as possíveis combinações. Como exemplo, suponha que se deseje reduzir $N = 100$ cenários para $N_{red} = 40$; o total de combinações de índices de cenários a explorar para determinar o conjunto J^* é da ordem de 10^{25} .

Como não é possível analisar cada um dos candidatos ao conjunto J^* , em [8] são apresentados alguns algoritmos que dispensam a análise exaustiva de todas as combinações de cenários. Dependendo da relação entre o número de cenários originais e o número reduzido desejado, duas técnicas alternativas podem ser utilizadas. As técnicas desenvolvidas são chamadas de *redução progressiva* e *redução regressiva*. A redução progressiva é adaptada para o caso em que $N_{red} < (3/4)N$. Neste caso, como a cardinalidade de J é grande, o algoritmo começa por descartar todos os cenários, e a cada iteração escolhe um cenário a ser preservado. Já a redução regressiva é adaptada para o caso em que $N_{red} \geq (3/4)N$, i.e., se deseja descartar menos de 25% dos cenários. Proceda de forma contrária à redução progressiva, começando com todos os cenários preservados, e a

cada iteração seleciona um cenário a ser descartado. Para o nosso estudo de caso aplica-se o algoritmo progressivo, já que deseja-reduzir em 90% o número original de cenários gerados pelo modelo GEVAZP.

Ambas as técnicas utilizam o mesmo procedimento heurístico, uma procedendo para frente e a outra para trás. Neste sentido são equivalentes e fornecem o mesmo resultado em mais ou menos tempo computacional, segundo sejam as características do problema. A heurística utilizada em cada iteração é chamada de *estratégia de máxima redução*. Ao invés de minimizar $c(J)$ para todos os possíveis conjuntos J , esta estratégia fixa iterativamente a cardinalidade de J e minimiza $c(J)$ neste subconjunto do conjunto viável do problema combinatório (2.8).

Mais precisamente, a iteração k -ésima define o conjunto J^k até a satisfação de um critério de parada que depende de uma tolerância $\varepsilon > 0$, dada como parâmetro. Para o algoritmo progressivo, por exemplo, a k -ésima iteração define J^k como a solução do problema $\min \{c(J) : J \subset I; \text{cardinalidade}(J) = N - k\}$. O algoritmo pára se $k = N_{red}$ ou se $c(J) \leq \varepsilon$, fazendo $J^* = J^k$ e calculando $Q(J^*)$.

A seguir, apresenta-se o estudo de caso onde o algoritmo progressivo foi utilizado.

3.0 - RESULTADOS

A teoria desenvolvida nas seções anteriores é validada mediante a utilização do algoritmo progressivo para uma configuração real do SIN utilizada pelo problema de planejamento da operação de curto prazo. A dimensionalidade da árvore de cenários gerada pelo modelo GEVAZP é reduzida em 90%. A qualidade da árvore reduzida ótima obtida é avaliada mediante diferentes testes estatísticos.

3.1 Caso utilizado

O caso estudado tem as seguintes características: histórico de vazões compreendido entre 1931 e 1998; tendência hidrológica correspondente ao ano de 1959; horizonte de planejamento de dois períodos, sendo janeiro o mês inicial. O número de cenários gerados para o primeiro período é igual a 100; dos quais foram preservados 99; para o segundo período foram gerados 10000 cenários, dos quais foram preservados 1000 cenários. O total de usinas da configuração somam 84, sendo Água Vermelha e Três Marias as usinas analisadas nas Figuras 1,2,3,4,7 e 8.

Uma primeira avaliação de qualidade dos cenários preservados consiste em comparar as estatísticas da árvore original (a árvore gerada pelo modelo GEVAZP) com os valores teóricos, segundo descrito em [9].

3.2 Médias e Desvios Padrões da Usina de Água Vermelha e Três Marias

A média e desvio padrão teórico correspondem aos valores esperados e desvios padrões condicionados do modelo auto-regressivo periódico de ordem p (*par(p)*) [10,11]. Nas Figuras 1,2,3 e 4 são comparados as médias e desvios padrões dos dados gerados com os valores teóricos. Observa-se que as estatísticas dos valores gerados estão contidas nos intervalos de aceitabilidade representados pelas barras de erros. As estatísticas dos cenários gerados (ou cenários originais) e as estatísticas dos cenários reduzidos se comportam de maneira satisfatória em relação aos valores teóricos.

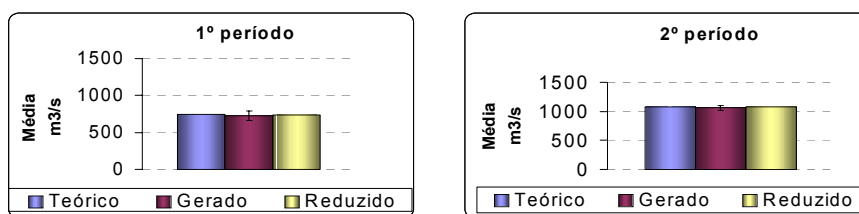


Figura 1: Médias do 1º e 2º períodos – Água Vermelha.

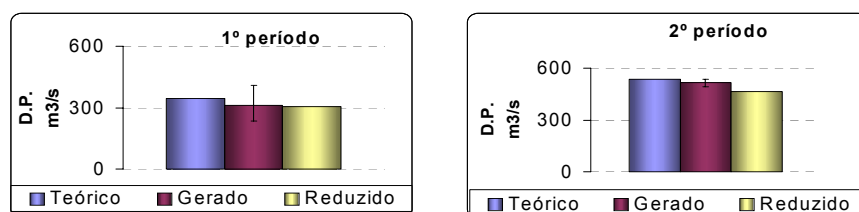


Figura 2: Desvios padrões do 1º e 2º períodos – Água Vermelha.

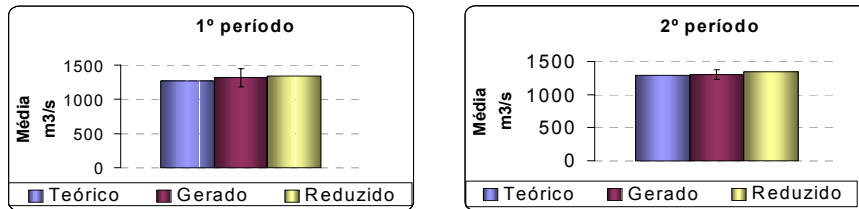


Figura 3: Médias do 1º e 2º períodos – Três Marias.

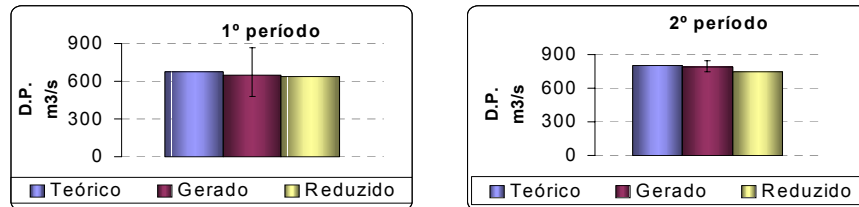


Figura 4: Desvios padrões do 1º e 2º períodos – Três Marias.

3.3 Regressão Linear: Médias e Desvios Padrões

Nas Figuras 5 e 6 são apresentadas as regressões lineares entre as médias e desvio padrões das árvores gerada e reduzida das usinas hidroelétricas da configuração. São apresentados também, o coeficiente angular θ da reta de regressão linear ($y = \theta x$), bem como o coeficiente de determinação R^2 , que mede o ajuste da reta de regressão linear às estatísticas dos valores gerados [12].

Como todo desenvolvimento da técnica de redução de cenários é fundamentado na minimização da diferença entre os valores esperados (expressão 2.4), já era de se esperar excelentes resultados em relação à estatística média, como confirmado pela Figura 5. A Figura 6 mostra que também os desvios padrões foram eficientemente preservados em ambos períodos. Estes resultados são confirmados pelo coeficiente angular da reta de regressão linear, e pelo coeficiente de determinação R^2 .

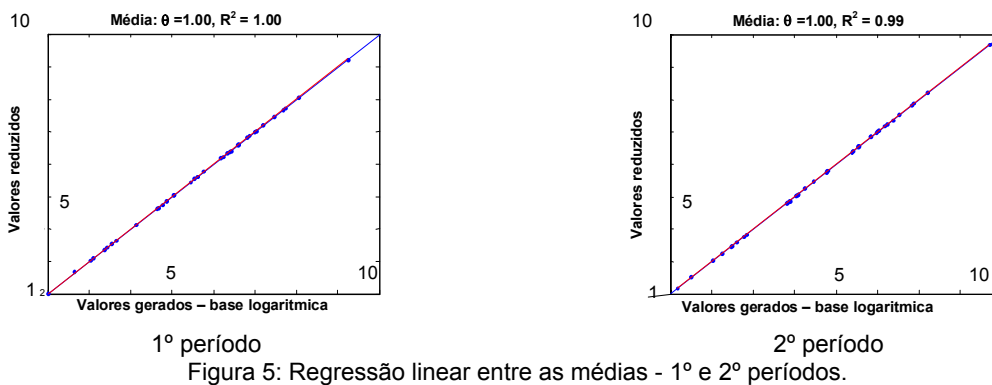


Figura 5: Regressão linear entre as médias - 1º e 2º períodos.

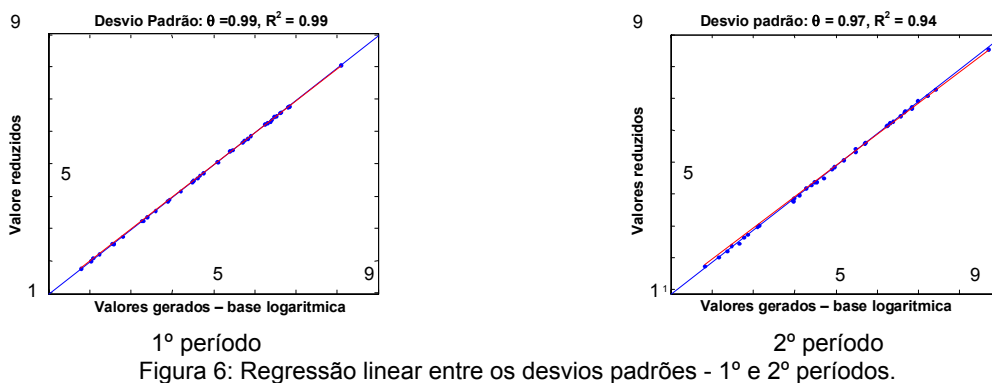


Figura 6: Regressão linear entre os desvios padrões - 1º e 2º períodos.

3.4 Regressão Linear: Correlação Espacial

As Figuras 7 e 8 representam, respectivamente, as correlações espaciais entre as vazões das usinas hidroelétricas de Água Vermelha, Três Marias, e as demais usinas hidroelétricas da configuração. A correlação espacial determina as dependências hidrológicas entre as usinas.

Para este estudo, os cenários reduzidos representam apenas 10% do total de cenários gerados. No entanto, como mostram as Figuras 7 e 8, este número bem reduzido de cenários ainda reproduz eficientemente as correlações espaciais entre as usinas hidrológicas da configuração.

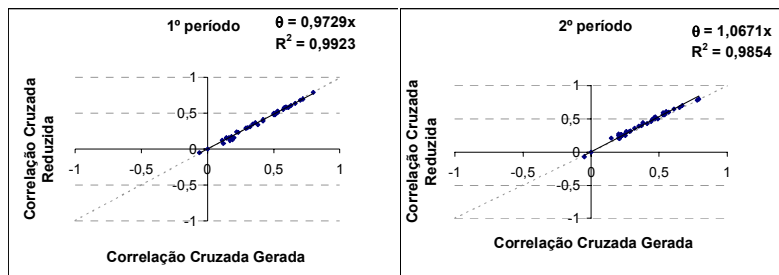


Figura 7: Correlação espacial entre Água Vermelha e as demais usinas -1º e 2º períodos.

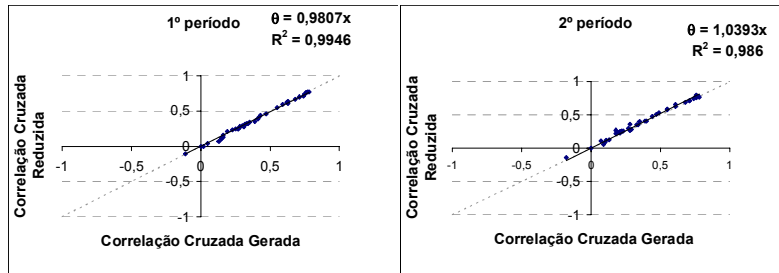


Figura 8: Correlação espacial entre Três Marias e as demais usinas -1º e 2º períodos.

3.5 Testes de Aderência

A Tabela 1 fornece os valores críticos referentes aos testes de aderência de Kolmogorov-Smirnov e Cramér-von Mises [13]. Estes testes medem a aderência entre as distribuições de probabilidades. Se o valor obtido for inferior ao valor crítico, considera-se que as duas distribuições de probabilidades (referentes à árvore original e à árvore reduzida) são aderentes.

Tabela 1: Teste de aderência entre as distribuições de probabilidade.

Teste de Aderência	Usina	valor crítico (5%)	1º período	2º período
Kolmogorov – Smirnov	Água Vermelha	1.36	0.558	0.477
	Três Marias		0.626	0.413
Cramér – von Mises	Água Vermelha	0.46	0.046	0.008
	Três Marias		0.057	0.010

Os valores da Tabela 1 confirmam a eficiência da fórmula ótima de redistribuição (2.7). Os valores obtidos são significativamente inferiores aos limites de aceitação. Este resultado garante a aderência entre as distribuições de probabilidades P e Q^* .

3.6 Regressão Linear: Correlação Temporal

Um parâmetro importante é a correlação entre as aflúncias dos períodos 2 e 1 de cada usina hidroelétrica. Na Figura 9 é comparada essa estatística obtida com os cenários gerados e reduzidos para cada uma das usinas da configuração.

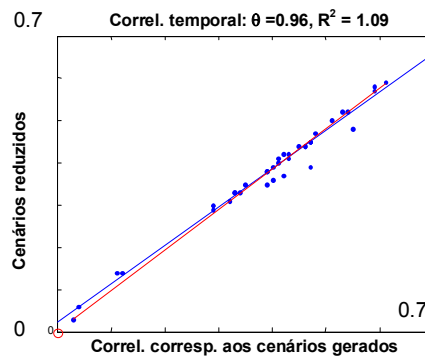


Figura 9: Correlação temporal entre os períodos 2 e 1.

Assim como nos resultados de correlação espacial, a Figura 9 apresenta bons resultados de aderência para as correlações temporais.

4.0 - CONCLUSÃO

A redução do porte da árvore de cenários de vazões afluentes a ser utilizada no planejamento da operação de curto prazo, necessária para viabilizar a obtenção de uma solução em termos de tempo computacional, deve garantir a representação adequada das principais características do processo de aflúncias hidrológicas.

O uso da métrica de Fortet-Mourier para definir o PRC e selecionar cenários suficientemente representativos a partir de uma árvore original com muitos cenários permite eliminar redundâncias de informações, e reduzir significativamente o tempo de processamento computacional.

Em particular, para o SIN, com um horizonte temporal de dois períodos, a boa qualidade da árvore reduzida, que representa apenas 10% do total de cenários gerados, obtida a partir da árvore com dez mil cenários é confirmada pelos testes estatísticos realizados. Em particular, estes testes indicaram uma grande aderência entre o conjunto de cenários preservados e o conjunto de cenários original. Além do mais, o processo utilizado preserva importantes características estatísticas da árvore original, como as correlações espaciais entre aflúncias às usinas hidroelétricas em estudo e correlações temporais entre os períodos 2 e 1.

Para o estudo do caso apresentado todos os testes e comparações efetuados foram plenamente satisfatórios. Pode-se então concluir que a métrica de Fortet-Mourier é uma ferramenta matemática muito eficiente para selecionar de forma acurada dentre um conjunto inicial de cenários aqueles que são mais representativos do ponto de vista estatístico e do ponto de vista da otimização.

O trabalho apresentado, se futuramente aplicado para a operação de curto prazo do SIN, permitirá utilizar árvores de cenários de dimensões aceitáveis que representem adequadamente o processo estocástico das aflúncias e sejam satisfatórias, tanto em termos de esforço computacional, quanto em termos de qualidade das soluções obtidas pelo modelo DECOMP.

5.0 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) MACEIRA, M.E.P.; TERRY, L.A.; DAMAZIO, J.M.; COSTA, F.S., MELO, A.C.G.; Chain of Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System, Power System Computation Conference – PSCC'02, Sevilla, Spain, June 24-28, 2002.
- (2) XAVIER, L.N., DINIZ, A.L.S., COSTA, F.S., MACEIRA, M.E., “Aprimoramento da Modelagem da Função de Produção (14) Energética das Usinas Hidroelétricas no Modelo DECOMP: Metodologias e Resultados”, XVIII SNPTEE – Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Curitiba, PR, outubro de 2005.
- (3) MACEIRA, M.E.P.; BEZERRA, C.V., 1997, “Stochastic Streamflow model for Hydroelectric Systems” In: Proceedings of 5th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems, pp. 305-310, Vancouver, Canada, Sep.
- (4) JARDIM, D.L.D.D.; MACEIRA, M.E.P.; FALCÃO, D.M., 2001, “Stochastic Streamflow Model for Hydroelectric Systems Using Clustering Techniques”, In Anais do *IEEE Porto Power Tech Conference*, vol.3, Porto, Portugal, Sep.
- (5) MACEIRA, M.E.P.; JARDIM, D.L.D.D.: 2000, Modelo de Geração de Séries Sintéticas de Energia e Vazões – GEVAZP – Manual de Referência, In: Relatório Técnico DPP/PEL 83/2000, CEPEL, Rio de Janeiro.
- (6) RASCHEV, S.T.; RÜSCHENDORF, L.: Mass Transportation Problems: Volume I: Theory (Probability and its Applications) (Hardcover) pp. 1-8, e 57-76.
- (7) DUPACOVÁ, J.; GRÖWE-KUSKA, N.; RÖMISCH, W.: Scenario reduction in stochastic programming: An approach using probability metrics, *Mathematical Programming*, Ser. A 95 (2003), 493-511
- (8) GRÖWE-KUSKA, N.; HEITSCH, H.; RÖMISCH, W.: Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems, *IEEE Bologna Power Tech Proceedings* (A. Borghetti, C.A. Nucci, M. Paolone eds.), 2003 IEEE. Páginas 2,3,4.
- (9) DAMÁZIO, J.M.: Verificação da preservação dos dois primeiros momentos as distribuição condicionada mais de um passo-à-frente em séries geradas em árvore pelo modelo GEVAZP. Relatório Técnico, 2002-CEPEL
- (10) MACEIRA, M.E.P.: Operação Ótima de Reservatórios com Previsão. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1989, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- (11) SALAS, J.D; DELLEUR, J. W.; YEIVIEVICH, V.; LANE W. L.: Applied Modeling of Hydrologic Time Series, Water Resources Publications, 1980.
- (12) GUJARATI, D. N. : Econometria Básica. 3th ed. Páginas 64 a 70.
- (13) SEIGEL, S., 1975, Estatística Não Paramétrica, São Paulo, Mc Graw-Hill, pp 144-155.