

GRUPO VIII
SUBESTAÇÕES E EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS (GSE)

DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DE FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA PROJETO DE ATERRAMENTOS ENCAPSULADOS

Humberto de Aquino Ribeiro

Silvério Visacro Filho

LATER - Laboratório de Aterramentos Elétricos
LRC - Lightning Research Center - CEMIG-UFMG
UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

RESUMO

Este trabalho apresenta alguns resultados de uma investigação para avaliação do comportamento de aterramentos encapsulados, quando submetidos ao fluxo de corrente elétrica para o solo. Os desenvolvimentos baseiam-se na formulação de um modelo para o aterramento, cuja abordagem utiliza o método de elementos de fronteira.

PALAVRAS-CHAVE

Aterramentos Elétricos - Aterramentos Encapsulados - Projeto de Aterramentos - Aterramentos Naturais

1 – INTRODUÇÃO

Historicamente, as partes metálicas dos sistemas hidráulicos eram empregadas como um sistema de aterramento alternativo. Esta prática constituía uma solução complementar valiosa para redução da impedância de aterramento de instalações elétricas residenciais e industriais. A partir da década de 60, iniciou-se uma intensa substituição dos componentes metálicos de sistemas hidráulicos por materiais isolantes (PVC). Desde então, esta prática foi reduzida e houve necessidade de desenvolver outras soluções para melhoria do desempenho de aterramentos. Isto justificou a presente prática de conectar os terminais de terra aos componentes metálicos do concreto, os quais podem estar presentes nas fundações de construções. Tal sistema é usualmente designado por "eletrodo de aterramento encapsulado em concreto" ou, simplesmente, "aterramento encapsulado".

Embora existam indicações da eficiência desta prática para várias aplicações, a avaliação quantitativa do

desempenho deste tipo de aterramento não é tarefa simples. A configuração correspondente (Figura 1) apresenta certas complexidades, associadas, sobretudo, à presença de três meios materiais diferentes (condutor, concreto e solo) e à geometria tipicamente não regular.

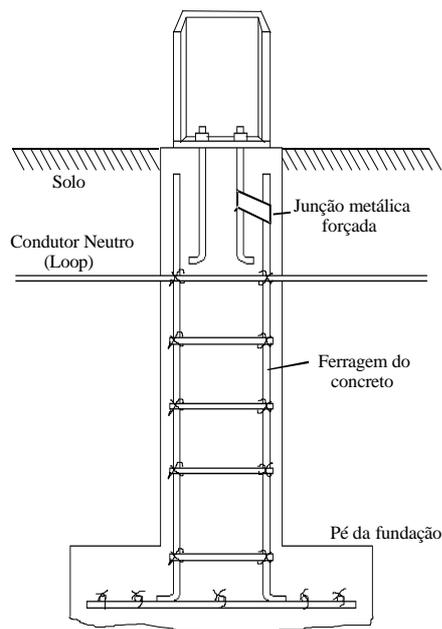


FIGURA 1

Exemplo de configuração de aterramento encapsulado.

Este quadro estimulou os autores a investigar e desenvolver uma ferramenta computacional capaz de realizar os cálculos necessários em projetos de aterramentos desta natureza. As características do problema, envolvendo superfícies condutoras e uma superfície de separação entre o concreto e o solo sugeriram o emprego do método de elementos de fronteira.

2 – DESENVOLVIMENTO DO MODELO

A fim de estabelecer uma formulação eletromagnética apropriada para o problema em consideração, certas aproximações são realizadas. A impedância longitudinal dos eletrodos é desprezada e o valor de resistividade do concreto é assumido como $400 \Omega.m$. Na superfície de fronteira entre o concreto e o solo é observado o princípio da continuidade da corrente e a formulação considera a possibilidade de distribuição não uniforme da corrente ao longo da extensão do eletrodo.

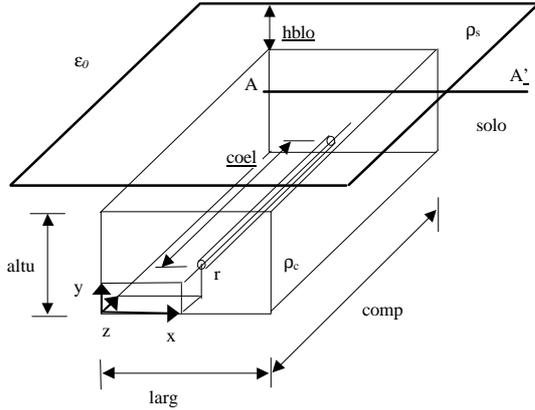


FIGURA 2

Configuração básica de aterramento encapsulado.

A Figura 2 ilustra os elementos básicos presentes no modelo: bloco de concreto retangular com um eletrodo cilíndrico em seu interior, enterrado no solo na posição horizontal. O fluxo de corrente elétrica em direção ao solo através do eletrodo condutor estabelece um campo elétrico no interior do bloco de concreto e na região próxima. O cômputo deste campo elétrico é feito, por similaridade, através do posicionamento de elementos superficiais de carga elétrica equivalentes sobre a superfície do eletrodo. Para ter em conta a presença do ar, é utilizada uma imagem do bloco (incluindo o eletrodo). A descontinuidade solo-concreto é considerada pelo posicionamento de outros elementos superficiais de carga elétrica equivalentes na superfície do bloco. Neste tópico é apresentada a essência da formulação do modelo, sendo os detalhes contemplados no Anexo 1.

A equação seguinte expressa o valor do potencial V referido a infinito, o qual é estabelecido no eletrodo pela passagem da corrente em direção ao solo:

$$V_i = V = \iint_S \frac{\mathbf{h}_s ds}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1)$$

Nesta integral, S representa todas as superfícies com elementos de carga (superfície do eletrodo + interface concreto-solo), \vec{r} é a posição de um ponto em S cuja densidade de carga é \mathbf{h}_s e \vec{r}_i é a posição de um ponto na superfície do eletrodo.

Devido à continuidade da corrente na superfície de separação situada entre o bloco de concreto e o solo, a seguinte relação pode ser observada:

$$J_{ns} = J_{nc} \rightarrow E_{ns} = \left(\frac{r_s}{r_c}\right) E_{nc} \quad (2)$$

onde J_{ns} é a componente normal da densidade de corrente no lado do solo, J_{nc} a componente no lado do concreto, E_{ns} e E_{nc} o campo elétrico correspondente e r_s e r_c as resistividades correspondentes. Por outro lado observa-se a condição de fronteira na superfície de separação entre o solo e o concreto:

$$D_{ns} - D_{nc} = \mathbf{h}_{si} \quad (3)$$

onde D_{ns} é a indução elétrica no lado do solo, D_{nc} a indução no lado do concreto e \mathbf{h}_{si} é a densidade superficial de carga no ponto \vec{r}_i localizado sobre a superfície de separação.

Substituindo a indução elétrica pelo campo elétrico, e observando a continuidade de corrente, tem-se:

$$\mathbf{e}_0(E_{ns} - E_{nc}) = \mathbf{h}_{si}; \quad \mathbf{e}_0 \left(\frac{r_s}{r_c} E_{nc} - E_{nc} \right) = \mathbf{h}_{si}; \quad \mathbf{e}_0 \left(\frac{r_s}{r_c} - 1 \right) E_{nc} = \mathbf{h}_{si}; \quad (4)$$

$$\left(\frac{r_s}{r_c} - 1 \right) \mathbf{e}_0 \iint_S \frac{\mathbf{h}_s (\vec{r}_i - \vec{r}) \cdot \vec{n}_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3} ds = \mathbf{h}_{si} \quad (5)$$

Estas são as equações básicas que descrevem o problema. A solução do mesmo consiste em se determinar a função \mathbf{h}_s que atende às equações. A partir da solução encontrada, calcula-se o campo elétrico na superfície do eletrodo. Dividindo-se o valor do campo pela resistividade do concreto, obtém-se a densidade de corrente, e integrando esta densidade sobre a superfície do eletrodo determina-se a corrente total que flui para o solo. Este valor, juntamente com o valor do potencial, permite calcular a resistência de aterramento da configuração. Além disso, pode-se utilizar a mesma equação (1) para calcular o potencial em pontos situados na superfície do solo.

3 – PROGRAMA COMPUTACIONAL

Com esta formulação do problema, foi implementado um código computacional para simulação do comportamento de configurações de aterramentos encapsulados, quando submetidos a um fluxo de corrente. O cálculo do potencial na superfície do eletrodo e do campo elétrico na superfície de separação do bloco são feitos mediante uma discretização das superfícies de carga do sistema. S é dividida em pequenas superfícies de carga, cada qual com um valor uniforme de densidade de carga (Figura 3). Constitui-se a partir daí um sistema de equações, que é resolvido matricialmente (Anexo 1).

4 – ANÁLISES

4.1 Introdução

Neste item, consideram-se aspectos de comportamento relativos a duas configurações básicas de aterramento encapsulado. Uma análise de sensibilidade é apresentada para os casos considerados, na busca de estabelecimento de uma relação entre os parâmetros de projeto e o desempenho do aterramento.

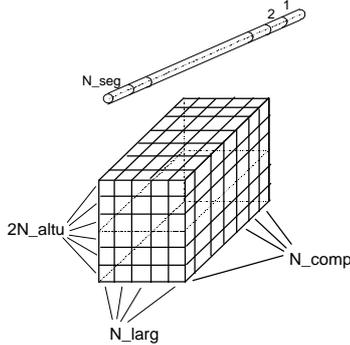


FIGURA 3

Discretização da superfície do eletrodo e da superfície do bloco de concreto.

4.2 Configuração de bloco único

No primeiro caso (Figura 2), o bloco situa-se logo abaixo da superfície do solo. A presença do ar é computada por meio de imagens: considera-se o bloco imerso num meio infinito, com o dobro de sua altura e incluindo dois eletrodos, simetricamente posicionados em relação a superfície do solo. Na Figura 3, 26 elementos de superfície foram utilizados no eletrodo, e 360 na interface concreto-solo. Um sistema de 386 equações foi constituído para resolver o problema.

Na Tabela 1, comparam-se os valores obtidos para a resistência de aterramento para diferentes relações entre as resistividades do solo e do concreto (ρ_s/ρ_c) com aquela de um eletrodo enterrado diretamente no solo. Para o caso da Tabela 1, as variáveis da Figuras 2 possuem os valores: comp= 3,0m, larg= 0,5m, altu=0,5m, hblo= 0, x =y= 0,25m, z =0,2m, coel=2,6m, r =0,005m, ρ_c =400 Ω .m, ϵ_0 = 8,85 x 10⁻¹² F/m).

A análise dos resultados denota que a presença do concreto implica significativa diferença no valor da resistência de aterramento, vista pelo eletrodo. Para o caso típico do solo brasileiro (altos valores de resistividade) a redução pode ser superior a 50%. A explicação para este comportamento decorre da importância da primeira camada do solo adjacente ao eletrodo na definição do valor da resistência de aterramento. A redução da resistividade desta camada implica diminuição sensível no valor desta resistência.

TABELA 1

Resistência do eletrodo encapsulado da Figura 2.

ρ_{solo} (Ω .m)	ρ_s/ρ_c	Resistência de aterramento (Ω)		
		Com bloco (R_1)	Sem bloco (R_2)	R_1/R_2 (%)
50	0,125	109,0	22,90	475
100	0,25	120,0	45,80	262
200	0,5	141,0	91,60	153
400	1	181,0*	183,0	98,8
800	2	259,0	366,0	70,6
1600	4	403,0	733,0	55,0
2400	6	536,0	1099	48,7
4000	10	774,0	1832	42,2
8000	20	1253	3664	34,2

*Erro numérico

A Figura 4 indica como o perfil de potencial na superfície do solo é afetado pela presença do concreto. Admite-se que uma corrente total igual a 1,0 kA é dissipada pelo eletrodo. Percebe-se uma significativa redução dos gradientes de potencial no caso de solos de alta resistividade.

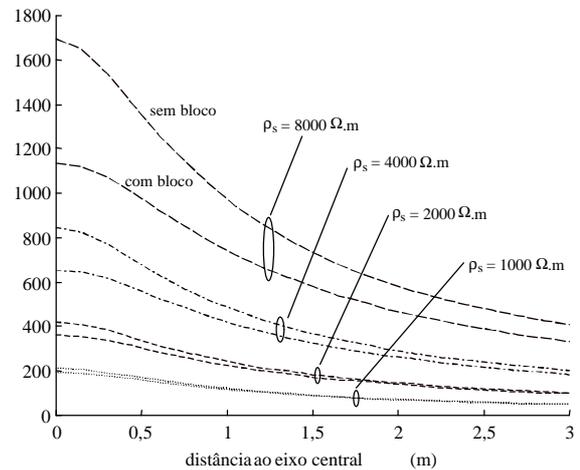


FIGURA 4

Perfil de potencial na superfície do solo
($I = 1$ kA - direção A-A')

Na Tabela 2, avalia-se a influência do número de condutores metálicos no bloco no valor da resistência de aterramento. Os resultados mostram que, para solos de baixa resistividade, a modificação no número e posição dos eletrodos é importante. Para solos de alta resistividade, somente na configuração utilizando quatro eletrodos foi observado um decréscimo razoável no valor da resistência de aterramento.

A influência das dimensões da seção do bloco de concreto (nos limites usuais nas condições de aplicação) e da posição do eletrodo em seu interior no valor da resistência de aterramento é considerada nas Tabelas 3, 4 e 5. Nota-se que não há nenhuma variação significativa na resistência de aterramento, para variações horizontais ou verticais na seção do bloco. Também, não há variação sensível em relação à profundidade do eletrodo.

TABELA 2

Resistência de aterramento em função da resistividade do solo, para configurações de dois e quatro eletrodos

ρ_s ($\Omega \cdot m$)	ρ_s/ρ_c	Resistência de aterramento do bloco (Ω) (% em relação à configuração de um único eletrodo)									
50	0.125	109,9	64,50 (58,7)	61,20 (55,7)	58,70 (53,4)	55,50 (50,5)	31,94 (29,1)	12,86 (11,7)			
100	0.25	120,4	74,90 (62,2)	71,90 (59,7)	69,30 (57,6)	65,90 (54,7)	43,75 (36,3)	26,79 (22,3)			
200	0.5	141,0	95,30 (67,6)	92,70 (65,7)	90,20 (64,0)	86,30 (61,2)	66,28 (47,0)	52,96 (37,6)			
400	1	181,2	135,1 (74,6)	132,9 (73,3)	130,4 (72,0)	126,0 (69,5)	107,4 (59,3)	99,92 (55,1)			
800	2	258,9	212,0 (81,9)	210,3 (81,2)	207,8 (80,3)	202,6 (78,3)	177,3 (68,5)	178,6 (69,0)			
1600	4	407,0	359,1 (88,2)	357,6 (87,9)	354,9 (87,2)	348,7 (85,7)	284,1 (69,8)	297,9 (73,2)			
2400	6	548,2	499,4 (91,1)	498,1 (90,9)	495,0 (90,3)	487,9 (89,0)	362,9 (66,2)	385,8 (70,4)			
4000	10	813,9	763,9 (93,9)	762,7 (93,7)	758,6 (93,2)	749,9 (92,1)	472,2 (58,0)	508,0 (62,4)			
8000	20	1400	1347 (96,3)	1346 (96,2)	1340 (95,7)	1328 (94,9)	616,9 (44,1)	670,6 (47,9)			

TABELA 3

Resistência de aterramento do bloco de concreto – variação seção horizontal

ρ_s ($\Omega \cdot m$)	ρ_s/ρ_c	Configuração								
						R_{solo}				
		R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{solo}
		(Ω)	(%)	(Ω)						
50	0.125	109,0	(475)	97,77	(426)	115,5	(504)	22,90		
100	0.25	120,0	(262)	110,2	(240)	125,2	(273)	45,79		
200	0.5	141,0	(153,*)	134,5	(146)	144,2	(157)	91,59		
400	1	181,0	*(98,8)	181,2	(98,9)	181,2	(98,9)	183,2		
800	2	259,0	(70,6)	270,0	(73,6)	252,0	(68,7)	366,4		
1600	4	403,0	(55,0)	433,0	(59,1)	383,0	(52,2)	732,7		
2400	6	536,0	(48,7)	582,7	(53,0)	502,7	(45,7)	1099		
4000	10	774,0	(42,2)	850,1	(46,4)	714,6	(39,0)	1832		
8000	20	1253	(34,2)	1382	(37,7)	1127	(30,7)	3664		

* Erro numérico

TABELA 5

Resistência de aterramento em função da resistividade do solo, para variação vertical da posição do eletrodo

ρ_s ($\Omega \cdot m$)	ρ_s/ρ_c	Configuração								
						R_{solo}				
		R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{solo}
		(Ω)	(%)	(Ω)						
50	0.125	112,0	(490)	108,2	(473)	97,80	(427)	22,90		
100	0.25	123,0	(268)	118,0	(258)	108,0	(236)	45,79		
200	0.5	143,0	(156)	137,1	(150)	127,6	(139)	91,59		
400	1	181,0	*(98,9)	173,6	(94,8)	165,1	(90,1)	183,2		
800	2	251,0	(68,6)	242,1	(66,1)	235,1	(64,2)	366,4		
1600	4	378,0	(51,6)	367,2	(50,1)	362,3	(49,5)	732,7		
2400	6	491,0	(44,7)	480,1	(43,7)	476,8	(43,4)	1099		
4000	10	688,0	(37,6)	677,5	(37,0)	676,7	(37,0)	1832		
8000	20	1.063	(29,0)	1054	(28,8)	1057	(28,9)	3664		

* Erro numérico

TABELA 4

Resistência de aterramento em função da resistividade do solo, para variação vertical da seção do bloco

ρ_s ($\Omega \cdot m$)	ρ_s/ρ_c	Configuração								
						R_{solo}				
		R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{enc}	$\frac{R_{enc}}{R_{solo}}$	R_{solo}
		(Ω)	(%)	(Ω)						
50	0.125	109,0	(475)	108,2	(473)	108,5	(474)	22,90		
100	0.25	120,0	(262)	118,0	(258)	117,7	(257)	45,79		
200	0.5	141,0	(153)	137,1	(150)	135,3	(148)	91,59		
400	1	181,0	*(98,8)	173,6	(94,8)	168,6	(92,0)	183,2		
800	2	259,0	(70,7)	242,1	(66,1)	230,7	(63,0)	366,4		
1600	4	403,0	(55,0)	367,2	(50,1)	343,1	(46,8)	732,7		
2400	6	536,0	(48,8)	480,1	(43,7)	443,9	(40,4)	1099		
4000	10	774,0	(42,3)	677,5	(37,0)	619,0	(33,8)	1832		
8000	20	1.253	(34,2)	1054	(28,8)	949,3	(26,0)	3664		

* Erro numérico

4.3 Configuração básica de um reticulado

Avaliações similares foram feitas para a configuração de um reticulado. Considera-se um bloco de concreto em forma de retângulo enterrado na superfície do solo, com um eletrodo em anel (Figura 5). Essa é uma configuração básica usualmente encontrada no perímetro de estruturas (fundações de construções) ou internamente às mesmas.

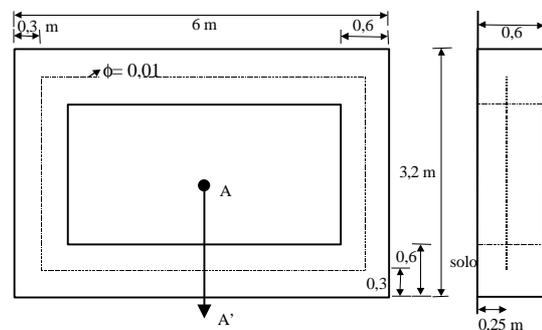


FIGURA 5

Dimensões do bloco de concreto retangular.

Foi realizada uma série de simulações, utilizando-se uma malha com um total de 3960 elementos. Com os resultados da simulação, calculou-se a resistência de aterramento para diversos valores de resistividade de solo. Os valores obtidos estão contidos na Tabela 6. O gráfico equivalente encontra-se na Figura 6.

TABELA 6
Valores de resistência de aterramento do bloco de concreto retangular

ρ_{solo} ($\Omega \cdot \text{m}$)	$\rho_{\text{solo}}/\rho_{\text{co}}$ n_c	Resistência de Aterramento (Ω)		
		Com bloco (R_1)	Sem bloco (R_2)	R_1/R_2 (%)
50	0,125	16,28	6,297	258,6
100	0,25	21,35	12,59	169,6
200	0,5	31,09	25,19	123,4
400	1	50,38	50,38	100,0
800	2	85,18	100,8	84,54
1000	2,5	102,2	125,9	81,11
2000	5	180,6	251,9	71,69
4000	10	311,1	503,8	61,76
8000	20	500,6	1008	49,69

Percebe-se um efeito mais pronunciado que no caso do bloco simples (Figura 2, Tabela 1), com redução significativa nos valores de resistência de aterramento em solos de alta resistividade, quando o bloco de concreto é usado, sendo indicativo favorável à prática.

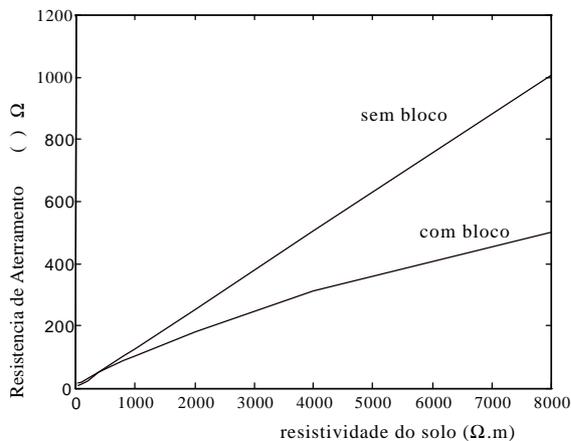


FIGURA 6

Varição da resistência de aterramento do bloco retangular

Foi obtido também o perfil de potencial na superfície do solo, como se vê na Figura 7. Percebe-se uma sensível redução nos níveis de potencial devido ao concreto. Nota-se, ainda, em função do envoltório de concreto, uma forte tendência de equalização de potencial na região interior ao reticulado.

Este resultado, para a configuração básica de um reticulado, pode ser utilizado para se estimar o comportamento do aterramento, no caso de configurações com vários reticulados.

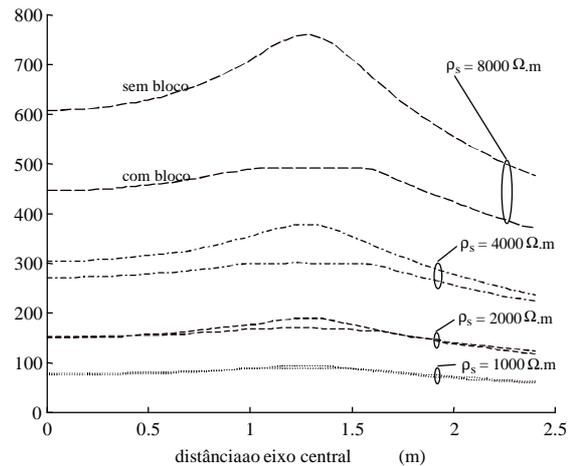


FIGURA 7
Perfil de potencial na superfície do solo
($I = 1 \text{ kA}$ direção A-A').

5 – CONCLUSÕES

Os resultados preliminares da investigação relativa aos aterramentos encapsulados mostram alguns aspectos de interesse prático. A análise de cada condição particular pode ser feita a partir das tabelas apresentadas.

Uma condição particular, cujos resultados têm implicação de valor técnico refere-se ao caso de solos de alta resistividade. Nesse caso, a prática pode ser muito efetiva, tanto para a redução da resistência de aterramento, quanto no controle do gradiente de potencial. Observam-se reduções superiores a 50% no valor da resistência de aterramento e, por conseguinte, no valor da elevação total de potencial do aterramento, GPR (grounding potential rise). Por outro lado, mesmo nas condições em que não há redução da resistência de aterramento, a conexão das ferragens ao aterramento contribui para a obtenção de perfis de potencial mais suaves, com atenuação do gradiente de potencial na superfície do solo.

A simulação do modelo desenvolvido exige um considerável esforço computacional, dada a complexidade natural da configuração física do aterramento encapsulado. Por esse motivo, neste trabalho descreveu-se a aplicação do modelo computacional para configurações básicas de eletrodos. Atualmente, os autores prosseguem em sua investigação com a incorporação ao modelo de técnicas computacionais de processamento de alto desempenho para tornar eficiente a avaliação de desempenho de configurações mais elaboradas de aterramentos encapsulados.

6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) VISACRO, S. F. Aterramentos Elétricos - Conceitos Básicos, Técnicas de Medição e Instrumentação e Filosofias de Aterramento. 1ª edição. 1997. Belo Horizonte.
- (2) VISACRO, S. F., RIBEIRO, H. A. Some evaluations concerning the performance of concrete-encased electrodes: an approach by the boundary elements. Proceedings of the International Conference on Grounding and Earthing, April 12-16, 1998, Belo Horizonte - Brazil
- (3) VISACRO, S. F., CAMPOS, M. A. Aplicação da Aproximação Potencial Constante no Projeto de Malhas de Aterramento: Análise de Sensibilidade; Testes Experimentais com Modelos Reduzidos. Anais do X-SNPTEE. Curitiba. 1989. Grupo VIII (GSE).
- (4) KOSTIC, M.B. Parametric Analysis of Foundation Grounding Systems Surrounded By Two-Layer Soil. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.9, No. 3, July 1994 - pp.1406-1411.
- (5) THAPAR, B., FERRER, O., BLANK, D.A. Ground Resistance of Concrete Foundations in Substation Yards. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol 5, nº 1, January 1990 - pp. 130-135.

7 – ANEXO 1

7.1 Uso de fontes de carga

O fluxo de corrente elétrica em direção ao solo através do eletrodo condutor estabelece uma distribuição de campo elétrico na região de concreto e no solo, determinando um valor de potencial para o eletrodo (referido a um ponto muito distante no solo). Para calcular este campo, a corrente que flui ao longo de toda superfície do eletrodo é aproximada por fontes lineares de corrente, posicionadas no eixo do eletrodo (em A/m). Elas constituem as variáveis independentes do problema. Nesta abordagem, as fontes lineares são substituídas por fontes superficiais de carga (em C/m²). Tal substituição apresenta como vantagem a drástica redução do número de imagens necessárias para computar a presença do ar e do concreto, em relação ao emprego de fontes lineares de corrente. É necessário considerar somente uma imagem, para computar a presença do ar. Por outro lado cada interface de mudança de meio (exceto a interface ar-solo) deve ser modelada por superfícies de carga adicionais (neste caso, a interface bloco de concreto-solo).

Uma fonte de corrente linear, de comprimento L, com densidade linear de corrente igual a I_L A/m está no eixo de um segmento de eletrodo de mesmo comprimento e raio r. Esta gera uma densidade de corrente igual a

I_L/2πr (A/m²) na superfície do eletrodo. O campo elétrico normal a esta superfície é dado por E_n=ρ_cI_L/2πr. Como η_s = ε₀E_n, o valor de I_L pode ser calculado a partir de η_s pela seguinte fórmula:

$$I_L = \frac{2pr}{r_c \epsilon_0} h_s. \quad (A.1)$$

I_L e η_s são considerados constantes ao longo do comprimento do segmento de eletrodo. A composição de vários segmentos forma um eletrodo, cada qual com um valor de I_L independente. A não uniformidade na distribuição da corrente ao longo do eletrodo é modelada pelos diferentes valores de I_L dos segmentos.

7.2 Montagem do sistema de equações

As superfícies de carga representadas por em S em (1) e (5) são divididas em pequenas superfícies de carga S_i, cada qual com um η_{si} associado. O potencial no segmento S_i pode ser calculado como a soma das contribuições individuais de cada pequena superfície:

$$V_i = \iint_{S_1} \frac{h_{s_1} ds}{4pe|\bar{r}_1 - \bar{r}_i|} + \iint_{S_2} \frac{h_{s_2} ds}{4pe|\bar{r}_2 - \bar{r}_i|} + \dots + \iint_{S_n} \frac{h_{s_n} ds}{4pe|\bar{r}_n - \bar{r}_i|} \quad (A.2)$$

$$V_i = h_{s_1} \cdot \iint_{S_1} \frac{ds}{4pe|\bar{r}_1 - \bar{r}_i|} + h_{s_2} \cdot \iint_{S_2} \frac{ds}{4pe|\bar{r}_2 - \bar{r}_i|} + \dots + h_{s_n} \cdot \iint_{S_n} \frac{ds}{4pe|\bar{r}_n - \bar{r}_i|} \quad (A.3)$$

$$V_i = h_{s_1} \cdot A_{i1} + h_{s_2} \cdot A_{i2} + \dots + h_{s_n} \cdot A_{in} \quad (A.4)$$

Levando em conta a mesma discretização, porém agora na condição de fronteira expressa em (5), tem-se:

$$\begin{aligned} h_{s_i} = & h_{s_1} \cdot \left(\frac{r_s}{r_c} - 1\right) \iint_{S_1} \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_1) \cdot \bar{n}_i}{4p|\bar{r}_1 - \bar{r}_i|^3} ds + \dots \\ & \dots + h_{s_i} \cdot \left(\frac{r_s}{r_c} - 1\right) \iint_{S_2} \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_2) \cdot \bar{n}_i}{4p|\bar{r}_2 - \bar{r}_i|^3} ds + \dots \\ & \dots + h_{s_n} \cdot \left(\frac{r_s}{r_c} - 1\right) \iint_{S_n} \frac{(\bar{r}_i - \bar{r}_n) \cdot \bar{n}_i}{4p|\bar{r}_n - \bar{r}_i|^3} ds; \quad (A.5) \end{aligned}$$

$$0 = A_{i1} \cdot h_{s_1} + \dots + (A_{ii} - 1) \cdot h_{s_i} + \dots + A_{in} \cdot h_{s_n} \quad (A.6)$$

Aplicando estas equações para cada elemento de S, é possível compor um sistema de equações lineares, expresso na forma matricial, cuja solução fornece o valor das densidades de carga e, logo, a resistência de aterramento e o potencial na superfície do solo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \dots & (A_{nn} - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (A.7)$$