



**GRUPO IV  
GRUPO DE ANÁLISE E TÉCNICAS DE SISTEMAS DE POTÊNCIA (GAT)**

**UMA METODOLOGIA ESTÁTICA PARA A IDENTIFICAÇÃO DO PONTO DE COLAPSO DE TENSÃO INCLUINDO AS CARACTERÍSTICAS DE REGIME PERMANENTE DOS COMPONENTES DINÂMICOS DO SISTEMA DE POTÊNCIA**

Luiz Carlos Pereira da Silva

Vivaldo Fernando da Costa\*

Departamento de Sistemas e Controle de Energia  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP

**RESUMO**

Neste artigo, é apresentado uma metodologia baseada no balanço nodal de potência para a avaliação da estabilidade de tensão, na qual o cálculo dos pontos de equilíbrio é realizado resolvendo-se simultaneamente o conjunto de equações algébricas e diferenciais em regime permanente. Esta formulação propicia a identificação direta da bifurcação sela-nó, associada ao ponto de colapso de tensão, através de um método de continuação, sem a necessidade de construir a matriz de estado e de calcular seus autovalores. Os limites de corrente de campo e de armadura são precisamente implementados, e os resultados de simulação que são apresentados demonstram as diferenças entre o limite de estabilidade de tensão obtido por esta metodologia e o limite propiciado pelo fluxo de potência convencional.

**PALAVRAS-CHAVE**

Estabilidade de Tensão, Método da Continuação, Bifurcação Sela-Nó, Margem de Estabilidade, Colapso de Tensão.

**1.0 - INTRODUÇÃO**

Embora oscilações de tensão com amplitudes crescentes também possam ocorrer, a instabilidade de tensão de sistemas de potência tem se caracterizado, na maioria dos casos, por um declínio progressivo e incontrolável da magnitude das tensões de algumas barras de carga do sistema. Este tipo de instabilidade tem sido referido na literatura como colapso de tensão

e caracterizado matematicamente por uma bifurcação sela-nó do sistema algébrico-diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema. Esta bifurcação ocorre em um ponto crítico de carregamento, e corresponde ao aparecimento de um único autovalor nulo no sistema dinâmico linearizado. Desta maneira, a identificação da bifurcação sela-nó é de fundamental interesse em estudos de colapso de tensão e intensas pesquisas tem sido realizadas a esse respeito.

As abordagens tradicionais para a identificação da bifurcação sela-nó envolvem duas fases: a determinação dos pontos de equilíbrio conforme um determinado parâmetro do sistema é incrementado, e o cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema dinâmico em cada um destes pontos de equilíbrio até que um autovalor nulo seja identificado. O cálculo de cada ponto de equilíbrio envolve dois passos: a resolução de um fluxo de potência para a obtenção das variáveis algébricas, e a avaliação das variáveis de estado a partir das equações que descrevem o comportamento de regime permanente dos componentes dinâmicos do sistema (sistemas de controle do gerador, cargas). No entanto, as hipóteses que estão implícitas nas equações do fluxo de potência relacionadas a este comportamento não são satisfeitas pelos modelos dinâmicos existentes, o que pode acarretar em discrepâncias consideráveis entre estes modelos e as equações do fluxo de potência. Por exemplo, quando um gerador é considerado como uma barra PV nas equações do fluxo de potência, do ponto de vista dinâmico isto significa que ou o gerador está equipado com um regulador automático de tensão com ganho estático infinito, ou possui um controle secundário ideal de tensão de modo a manter a sua

tensão terminal constante. É claro que nenhuma destas hipóteses é realista na prática, visto que conforme a carga aumenta, a tensão terminal do gerador experimenta um declínio determinado pela característica de regulação de tensão do Regulador Automático de Tensão (RAT). Desta maneira, é praticamente impossível para a abordagem do cálculo dos pontos de equilíbrio em dois passos levar em conta esta característica, sem ajustar repetidamente as variáveis especificadas no cálculo do fluxo de potência, tanto as magnitudes de tensões de barras controladas, quanto as potências geradas pelas barras PV e limites de reativos. Além disso, os limites de corrente de campo e de armadura que em muitos casos são a causa essencial da ocorrência do colapso de tensão, podem ser representados somente de forma aproximada nas equações do fluxo de potência, e são, em geral, ignorados na formação da matriz de estado do sistema, e portanto, na detecção da bifurcação sela-nó.

Neste artigo, é apresentada uma metodologia baseada no balanço nodal de potência (1) para a avaliação da estabilidade de tensão, na qual o cálculo dos pontos de equilíbrio é realizado resolvendo-se simultaneamente o conjunto de equações algébricas e diferenciais em regime permanente, obtendo-se todas as variáveis algébricas e de estado em um único passo. A formulação proposta propicia a identificação direta da bifurcação sela-nó durante o processo de obtenção do diagrama de bifurcação através de um método de continuação, sem a necessidade de construir a matriz de estado e de calcular os seus autovalores. Os limites de corrente de campo e de armadura são precisamente implementados, e exceto para o ajuste das variáveis de controle no caso básico, as hipóteses de barras de referência e PV são eliminadas. Os resultados de simulação que são apresentados demonstram as diferenças entre o limite de estabilidade de tensão obtido por esta metodologia e o limite propiciado pelas abordagens tradicionais.

## 2.0 - METODOLOGIA ESTÁTICA INCLUINDO AS CARACTERÍSTICAS DE REGIME PERMANENTE DOS COMPONENTES DINÂMICOS DO SISTEMA

O sistema de energia elétrica é modelado integralmente por um conjunto de equações diferenciais e um conjunto de equações algébricas, representadas por:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, Y, I, U) \\ 0 &= G(X, Y, I, U) \end{aligned} \quad (1)$$

onde X representa o vetor de variáveis de estado, Y o vetor de variáveis algébricas,  $\lambda$  o parâmetro de carregamento do sistema e U os valores de referência nos quais os reguladores de tensão e de velocidade são ajustados.

No sistema de equações (1), o conjunto de equações diferenciais F descreve a dinâmica dos geradores síncronos e seus dispositivos de controle (de tensão e de velocidade), bem como a dinâmica das cargas, que neste trabalho são representadas de forma agregada através do modelo dinâmico de Xu-Mansour (2). O conjunto de equações algébricas G representa a rede de transmissão. Estas equações são obtidas através do balanço de potência em cada barra do sistema, necessário para que o equilíbrio entre a quantidade total de potência gerada e consumida seja garantido. O balanço de potência em cada barra é dado por:

$$\begin{aligned} P_g - I P_c - P_k &= 0 \\ Q_g - I Q_c - Q_k &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $P_g$  e  $Q_g$  representam as potências ativa e reativa geradas,  $P_c$  e  $Q_c$  as demandas de potência ativa e reativa especificadas parametrizadas pelo fator de carregamento  $\lambda$  e  $P_k$  e  $Q_k$  são as potências ativa e reativa líquidas injetadas em cada barra do sistema (todas descritas detalhadamente no apêndice A).

Neste trabalho, o cálculo dos pontos de equilíbrio do sistema (1) é realizado em um único passo, isto é, resolvendo-se simultaneamente o conjunto de equações algébricas e diferenciais em regime permanente. Para isso, é necessário, portanto, anular todas as derivadas no sistema (1), obtendo-se um sistema puramente algébrico, representado por:

$$\begin{aligned} 0 &= F(X, Y, I, U) \\ 0 &= G(X, Y, I, U) \end{aligned} \quad (3)$$

o qual pode ser resolvido iterativamente para um dado carregamento ( $\lambda$ ) através de:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(X_o, Y_o, I, U) \\ G(X_o, Y_o, I, U) \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde  $J_1, J_2, J_3$  e  $J_4$  são submatrizes da matriz Jacobiana do sistema dinâmico. Desta forma, todas as variáveis do sistema (algébricas e diferenciais) são calculadas, sem a necessidade de definição de barras PV ou barra infinita. Um acréscimo de carga é dividido entre os geradores automaticamente de acordo com os seus estatismos, tornando desnecessário o ajuste da geração de potência ativa especificada a cada acréscimo de carga. O ajuste dos dispositivos de controle (vetor U) é efetuado através da solução do fluxo de potência convencional no caso base ( $\lambda=1$ ). Isto significa que

somente no caso base as tensões terminais dos geradores serão exatamente iguais aos seus valores especificados. Para  $\lambda \neq 1$ , essas tensões sofrem queda com aumento de carga e elevação com alívio de carga, devido ao erro de regime introduzido pelo regulador de tensão. Característica semelhante ocorre com a velocidade das máquinas, a não ser que o controle suplementar de carga-frequência seja considerado. Cabe salientar, que uma referência de ângulo deve ser escolhida para o sistema. Neste trabalho, a referência é considerada em um dos geradores ( $ger_{ref}$ ), e consequentemente, a equação correspondente deve ser eliminada do sistema de equações (3).

### 2.1 - Controle de limites

O sistema de excitação, além de controlar a tensão terminal do gerador, tem a função de proteger os enrolamentos de campo e de armadura do gerador síncrono de correntes acima de seus limites térmicos. Se a saturação da excitatriz é desprezada, o limite de corrente de campo pode ser controlado diretamente através do regulador de tensão, pois nessas condições a variável de saída do regulador ( $V_r$ ) é diretamente proporcional a tensão de campo ( $E_{fd}$ ), que em regime e em p.u., é igual a corrente de campo. Desta forma,  $V_r$  pode ser limitada em um valor máximo ( $V_{r,max}$ ) que indica o limite de corrente de campo. Uma vez que  $V_r$  atinge seu valor máximo, essa variável passa a ser um parâmetro fixo, e consequentemente, a equação correspondente é eliminada do sistema (3). Analogamente a condição de excitação mínima pode ser considerada, fixando-se a saída do regulador no seu valor mínimo. De forma indireta, o limite de corrente de armadura também pode ser considerado através do regulador de tensão. Uma vez que o limite de corrente de armadura é violado, um fator redutor é calculado ( $\alpha = I_{a,max}/I_a < 1$ ). Em seguida, a excitação é reduzida na mesma proporção e transformada em um parâmetro fixo ( $V_{r,max} = \alpha V_r$ ). Visto que esta ação muda o estado da rede, alterando a corrente de armadura, e que a relação excitação *versus* corrente de armadura quando a carga é variada pode ser não linear, este procedimento garante uma redução na corrente de armadura, mas não garante que ela volte ao limite. Desta forma, é necessário que esta redução de campo seja repetida algumas vezes, em proporções cada vez menores, até que a corrente de armadura seja igual ao seu valor máximo a menos de um erro pré-selecionado. De forma análoga, o limite de geração de potência ativa pode ser eficientemente considerado através do regulador de velocidade. Uma vez que a potência mecânica máxima da turbina é atingida, a variável  $P_{sv}$  é fixada em seu valor máximo ( $P_{sv} = P_{sv,max}$ ), e a equação correspondente é retirada do sistema (3).

Este mesmo procedimento pode ser utilizado para se evitar reversão de potência nos geradores, impondo-se um valor mínimo para  $P_{sv}$ .

### 2.2 - Método da continuação

Em condições limites de carregamento, os métodos usuais de obtenção do estado da rede de energia elétrica apresentam dificuldades de convergência, devido a problemas de singularidade da matriz Jacobiana do sistema linearizado. Este trabalho utiliza um método de continuação composto de etapas de previsão, correção, parametrização e controle de passo, (3, 4), que contorna a singularidade da matriz Jacobiana, e portanto torna possível o cálculo preciso do máximo carregamento do sistema, bem como, de pontos na parte inferior da curva PV. Na etapa de previsão, calcula-se o vetor tangente a partir de um ponto inicial sobre a curva, e então dá-se um passo a partir desse ponto sobre a reta tangente. Com isso, percebe-se que o ponto previsto pode estar consideravelmente fora da curva que se deseja obter. A etapa de correção consiste em trazer o estado da rede de volta a curva original, isto é, encontrar a solução tendo como ponto de partida o ponto dado pela etapa de previsão. Além disso, uma parametrização local é necessária para que a singularidade da matriz Jacobiana seja contornada e para dar robustez ao método na região de máximo carregamento. Normalmente, a magnitude ou o ângulo da tensão de uma barra fraca do sistema é escolhida para ser o parâmetro nesta região (5). O controle de passo é aplicado para obter-se a condição de máximo carregamento com maior precisão. No entanto, a parametrização por magnitude ou ângulo de tensão fornece um controle de passo automático e implícito, visto que, a medida que se aproxima da região de máximo carregamento, um passo fixo de tensão provoca mudanças cada vez menores no fator de carregamento ( $\lambda$ ) do sistema.

## 3.0 - TESTES E RESULTADOS

Nos testes realizados os controladores, tanto de velocidade quanto de tensão, são ajustados de forma a fornecer erro de regime nulo para o caso base de carga ( $\lambda=1$ ). São consideradas todas as possíveis situações de carregamento desde carga leve até carga pesada. Qualquer mudança no carregamento do sistema é absorvido pelos geradores de acordo com os seus estatismos, sendo que o controle secundário de velocidade, bem como o redespacho econômico não foram ainda incluídos na metodologia proposta neste trabalho.

### 3.1 - Sistema de duas barras

Inicialmente é considerado um sistema de duas barras com um gerador hidráulico de 247.5 MVA alimentando uma carga base de  $190 + j90$  MVA, através de uma linha de transmissão sem perdas ativas com reatância igual a 0.1 pu.

A Figura 1 mostra que o cálculo dos pontos de equilíbrio do sistema é dependente do ganho estático do regulador de tensão ( $K_a$ ). Quanto maior o ganho estático, menor é o erro de regime nas tensões controladas, e conseqüentemente, maior é a capacidade de carregamento do sistema. A curva obtida para ganho estático infinito (erro de regime nulo) é equivalente a obtida através do fluxo de carga convencional.

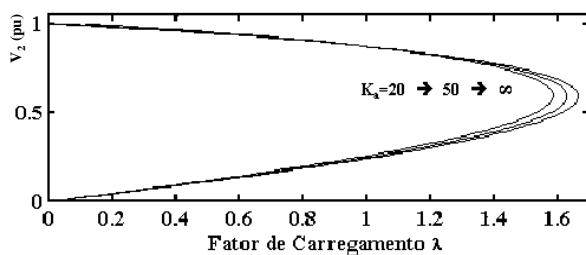


FIGURA 1 - EFEITO DO GANHO ESTÁTICO DO RAT

Na Figura 2-(a) é mostrado o efeito do limite de corrente de campo do gerador, o qual é atingido no ponto A. A partir deste ponto a tensão terminal do gerador deixa de ser controlada, caindo sensivelmente com acréscimos de carga, e causando queda acentuada de tensão da barra de carga. Em decorrência disso, a máxima capacidade de carregamento do sistema é drasticamente diminuída, mostrando que a localização precisa da bifurcação sela-nó é extremamente dependente deste limite. A Figura 2-(b) mostra a atuação do limitador de corrente de campo, fixando a saída do regulador de tensão quando a corrente de campo máxima é atingida (ponto A).

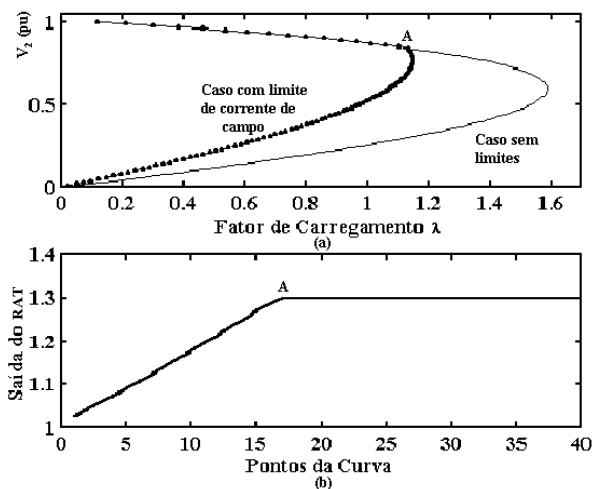


FIGURA 2 - EFEITO DO LIMITE DE CORRENTE DE CAMPO

Na Figura 3-(a) é mostrado o efeito do limite de corrente de armadura, o qual é atingido no ponto B. Como pode-se notar, a máxima capacidade de transmissão é consideravelmente diminuída. A partir do ponto B, o gerador pode ser visto como uma fonte de corrente constante, como mostra a Figura 3-(b). Para que isso ocorra, o campo deve ser adequadamente reduzido a cada ponto pelo limitador de corrente de armadura, como pode ser visto na Figura 3-(c).

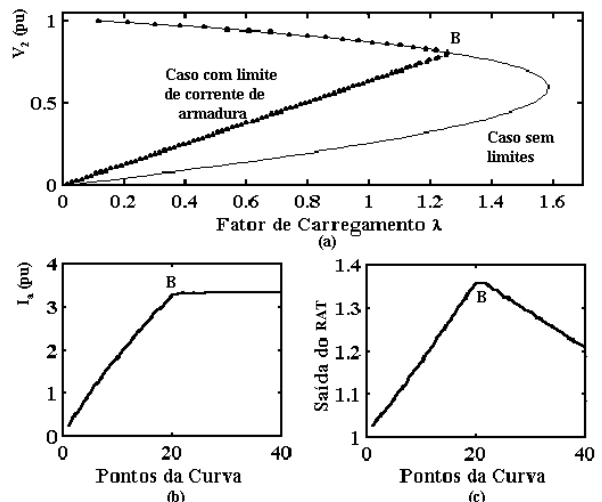


FIGURA 3 - EFEITO DO LIMITE DE CORRENTE DE ARMADURA

### 3.2 - Sistema de nove barras

Este sistema, composto por três geradores, é descrito detalhadamente na referência (6), e é utilizado neste item para mostrar os limitadores atuando conjuntamente, bem como as discrepâncias entre a metodologia proposta neste trabalho e o fluxo de potência convencional.

A Figura 4, mostra as curvas PV nas barras 1 (barra infinita) 2 e 3 (barras PV). Como pode-se observar, estas tensões sofrem variações quando a carga do sistema é alterada, devido ao erro de regime do regulador de tensão. Esta é a primeira discrepância detectada em relação ao fluxo de potência convencional, o qual considera as tensões nas barras controladas constantes para qualquer carregamento.

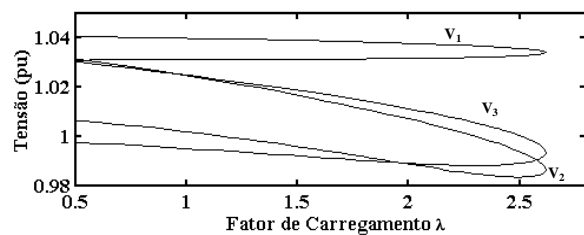


FIGURA 4 - ERRO DE REGIME DO RAT

A Figura 5 mostra uma simulação da metodologia proposta considerando os limites de corrente de campo

e de armadura, bem como os limites de potência ativa dos geradores. A Figura 5-(a) mostra a curva PV da barra 2 (tipo PV), e os pontos onde os limites são atingidos. As Figuras 5-(b) e 5-(c) mostram as saídas dos reguladores de tensão (controle de excitação) e dos reguladores de velocidade (controle de potência mecânica da turbina) dos três geradores.

Deve-se notar nestas figuras, que nos pontos  $A_1$  e  $A_2$  as máquinas  $G_3$  e  $G_2$  atingem, respectivamente, seus limites de potência ativa. Em vista disso, as saídas dos reguladores de velocidade dessas máquinas são mantidas fixas, enquanto que a máquina  $G_1$  passa a assumir integralmente os acréscimos de carga. Mesmo no limite de potência ativa a máquina  $G_2$  continua fornecendo potência reativa, até que seu limite de corrente de campo é atingido no ponto B. A partir deste ponto a excitação de  $G_2$  é mantida constante. Consequentemente, sua tensão terminal deixa de ser controlada e começa a cair, e portanto, a sua corrente de armadura começa a aumentar até atingir o limite no ponto C. A partir deste ponto, reduções na excitação desta máquina são necessárias para que a corrente de armadura seja mantida constante.

Cabe salientar que o limite de potência ativa da máquina  $G_1$  não foi atingido, e, portanto, este gerador teria condições de fornecer mais potência ativa às cargas. No entanto, a operação das máquinas  $G_2$  e  $G_3$  nos seus limites de corrente de campo ou de armadura, reduz sensivelmente a capacidade do sistema de fornecer potência reativa, caracterizando um cenário típico de instabilidade de tensão.

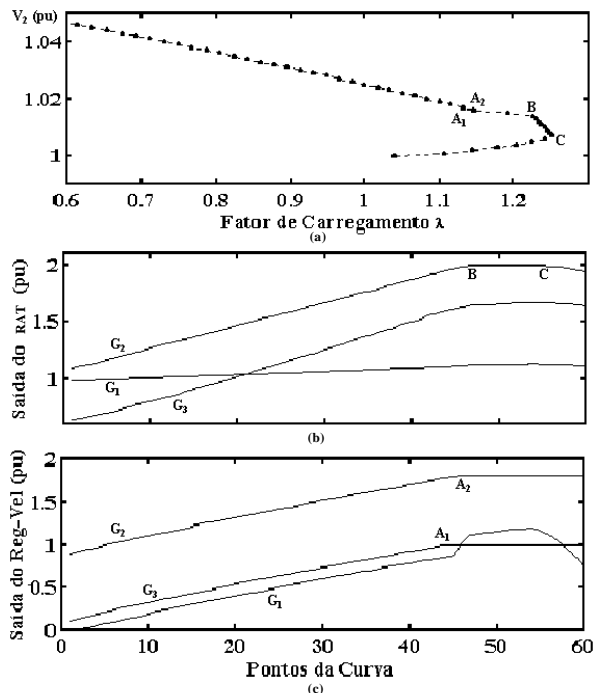


FIGURA 5 - EFEITO CONJUNTO DOS LIMITES DE CORRENTE DE CAMPO, DE ARMADURA E DE POTÊNCIA ATIVA

A Figura 6 mostra a comparação do método proposto com o método de fluxo de potência convencional. Pode-se observar que o limite estático de estabilidade de tensão, dado pela máxima capacidade de carregamento do sistema, é calculado de forma otimista pelo fluxo de potência convencional, mesmo quando os limites de reativos dos geradores e de taps dos transformadores são considerados. Desta forma, é muito difícil que se obtenha uma margem de estabilidade de tensão precisa através desse método. Além do erro de regime dos reguladores, as seguintes razões causam discrepâncias entre a metodologia proposta neste trabalho e o método convencional: a) os limites de reativos são usualmente mantidos constantes no método convencional, quando na verdade, são extremamente dependentes do ponto de equilíbrio, ou seja, da tensão terminal e da potência ativa fornecida pelo gerador. Assim, é quase impossível para o fluxo de potência convencional respeitar os limites da curva de "capability" de cada gerador; b) a distribuição de carga entre os geradores é usualmente desprezada, ou seja, considera-se que a barra infinita assuma todo o acréscimo de carga, ou então, é distribuída entre os geradores de forma proporcional ao caso básico (5). Na metodologia proposta os acréscimos de carga são divididos de acordo com o estatismo de cada máquina, podendo, além disso, introduzir facilmente o controle automático de geração para considerar o redespacho econômico, o que levaria a obtenção de um limite mais preciso; c) os limites de corrente de armadura e de campo não podem ser precisamente modelados no fluxo de potência convencional, enquanto que na metodologia proposta eles são considerados através do controle de excitação das máquinas síncronas.

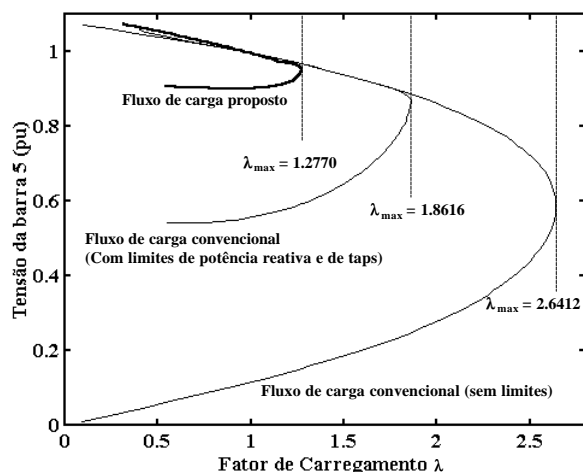


FIGURA 6 - COMPARAÇÃO COM O FLUXO DE CARGA CONVENCIONAL

#### 4.0 - CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi proposta uma metodologia estática baseada no balanço nodal de potência para a avaliação da estabilidade de tensão, na qual os pontos de equilíbrio são obtidos através da resolução simultânea do conjunto de equações algébricas e diferenciais. Esta formulação propicia uma identificação mais precisa da bifurcação sela-nó, associada ao ponto de colapso de tensão, do que as abordagens tradicionais, visto que as características de regime permanente dos componentes dinâmicos do sistema são consideradas. Além disso, os limites de corrente de campo e de armadura, bem como os limites de potência ativa podem ser precisamente implementados, e exceto para o ajuste das variáveis de controle no caso básico, as hipóteses de barra de referência e barras PV são eliminadas. Os resultados de simulação apresentados demonstram as diferenças entre o limite de estabilidade de tensão obtido por esta metodologia e o limite propiciado pelo fluxo de potência convencional.

## 5.0 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) DA SILVA, L.C.P., MOREIRA C.M., DA COSTA, V.F., A Influência das Características dos Geradores e das Cargas na Estabilidade de Tensão de Sistemas de Energia Elétrica, VI SEPOPE (1998), Salvador-BA.
- (2) XU, W., MANSOUR, Y., Voltage Stability Analysis Using Generic Dynamic Load Models, *IEEE Transactions on Power Systems*, 93WM185-9PWRS,(1993), pp. 1-8.
- (2) Suggested Techniques for Voltage Stability Analysis, *IEEE Power Engineering Society*, 93TH0620-5PWR, (1993), 142p.
- (4) DA SILVA L.C.P., DA COSTA V.F., Método da Continuação para a Solução de Sistemas não-Lineares mal-Comportados: Aplicação em Redes de Energia Elétrica, 50<sup>th</sup> SBPC, (1998), Natal-RN.
- (5) ALVES, D.A., DA SILVA, L.C.P., CASTRO, C.A., DA COSTA, V.F., Parameterized Fast Decoupled Load Flow for Tracing Power Systems Bifurcation Diagrams, aceito para apresentação no IEEE Summer Meeting, (1999), Edmonton, Canada.
- (6) ANDERSON, P.M., FOUAD, A.A. *Power System Control and Stability*, Iowa State University Press, (1977).

## APÊNDICE A

### Modelo do gerador síncrono

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}_i}{dt} &= \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{ger\_ref} \\ M_i \frac{d\mathbf{w}_i}{dt} &= P_{mi} - P_{gi} - D_i \mathbf{w}_i \\ T_{doi} \frac{dE'_{qi}}{dt} &= E_{fdi} - E'_{qi} - \frac{x'_{di} - x'_{di}}{x_{di}} \left( E'_{qi} - V_i \cos(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) \right) \\ T_{qoi} \frac{dE'_{di}}{dt} &= -E'_{di} + \frac{x_{qi} - x'_{qi}}{x_{qi}} \left( -E'_{di} + V_i \sin(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) \right) \end{aligned}$$

### Modelo do regulador de tensão (Tipo 1- IEEE)

$$\begin{aligned} T_{Ei} \frac{dE_{fdi}}{dt} &= -K_{Ei} E_{fdi} + V_{ri} \\ T_{Ai} \frac{dV_{ri}}{dt} &= -V_{ri} + K_{Ai} R_{fi} - \frac{K_{Ai} K_{fi}}{T_{fi}} E_{fdi} + K_A \left( V_{ref\_i} - V_i \right) \\ T_{Fi} \frac{dR_{fi}}{dt} &= -R_{fi} + \frac{K_{fi}}{T_{fi}} E_{fdi} \quad \text{onde, } V_{ri, \min} \leq V_{ri} \leq V_{ri, \max} \end{aligned}$$

### Modelo da turbina

$$T_{chi} \frac{dT_{mi}}{dt} = -T_{mi} + P_{svi}$$

### Modelo do Regulador de velocidade

$$\begin{aligned} T_{svi} \frac{dP_{svi}}{dt} &= -P_{svi} + P_{gi\_ref} - \frac{1}{R_i} \left( \frac{w_i}{w_{sinc}} - 1 \right) \\ \text{Com } 0 &\leq P_{svi} \leq P_{svi, \max} \end{aligned}$$

### Injeção de potência nas barras de geração

$$\begin{aligned} P_{gi} &= \frac{V}{x'_{di}} E'_{qi} \sin(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) - \frac{V}{x'_{qi}} E'_{di} \cos(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) + \\ &\quad \frac{V^2}{2} \sin 2(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) \left( \frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right) \\ Q_{gi} &= \frac{V}{x'_{di}} E'_{qi} \cos(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) + \frac{V}{x'_{qi}} E'_{di} \sin(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i) - \\ &\quad \frac{V^2}{2} [1 - \cos 2(\mathbf{f}_i - \mathbf{q}_i)] \left( \frac{1}{x'_{qi}} - \frac{1}{x'_{di}} \right) - \frac{V^2}{x'_{di}} \end{aligned}$$

### Injeções de potência nas barras do sistema

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{m \in K} V_k V_m (G_{km} \cos \mathbf{q}_{km} + B_{km} \sin \mathbf{q}_{km}) \\ Q_k &= \sum_{m \in K} V_k V_m (G_{km} \sin \mathbf{q}_{km} - B_{km} \cos \mathbf{q}_{km}) \end{aligned}$$

### Modelo dinâmico das cargas : Modelo de Xu-Mansour

$$T_{pi} \frac{dx_{pi}}{dt} = P_{ci} - x_p P_{ti}; \quad T_{qi} \frac{dx_{qi}}{dt} = Q_{ci} - x_q Q_{ti};$$

$$P_{ci} = P_o (ap + bpV + cpV^2 + dpV^{np})$$

$$P_{ti} = (ep + fpV + gpV^2 + hpV^{mp})$$

$$Q_{ci} = Q_o (aq + bqV + cqV^2 + dqV^{nq})$$

$$Q_{ti} = (eq + fqV + gqV^2 + hqV^{mq})$$