

# Algoritmo *Branch and Bound* para Solucionar o Problema da Alocação de Monitores de Qualidade de Energia Elétrica em Redes de Transmissão

Débora C. S. Reis, *Student Member, IEEE*, Paulo R. C. Villela e Carlos A. Duque, *Member, IEEE*

**Resumo**— É apresentado neste artigo um algoritmo *branch and bound* para a solução do problema de otimização combinatória resultante da modelagem do problema de alocação ótima de medidores de qualidade de energia elétrica em uma rede de transmissão qualquer do sistema elétrico de potência. Inicialmente mostra-se a modelagem do problema de otimização, que é baseado fortemente na topologia da rede. Em seguida, apresenta-se o algoritmo desenvolvido para encontrar o número mínimo necessário de monitores para garantir a observabilidade da rede e quais as suas possíveis localizações. Finalmente, realizam-se simulações em três sistemas IEEE distintos.

**Palavras-chave**—qualidade de energia, monitoramento da qualidade de energia, alocação de monitores de qualidade de energia, otimização combinatória, *branch and bound*.

## I. INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios para garantir a qualidade de energia em uma rede de transmissão e distribuição é a identificação das diversas fontes “poluidoras do sistema” e a quantificação dos níveis de poluição de cada uma das fontes. Estas informações são fundamentais para as concessionárias de energia e agências reguladoras, uma vez que a partir delas será possível criar políticas corretivas e punitivas em relação aos agentes poluidores. O problema de localização das fontes de distúrbios tem motivado diversas pesquisas recentes entre elas podemos citar as referências [19-23]. Este problema, porém, é de difícil solução dado o alto nível de interconexão das redes elétricas e sua solução passa pelo monitoramento distribuído das redes, através dos monitores de qualidade de energia. O maior problema enfrentado no monitoramento da rede elétrica está associado ao custo dos medidores e dos canais de comunicação, motivando assim desenvolvimento de metodologias que procuram minimizar o custo total do sistema de monitoramento [1- 10].

Abur e Magnano [3] tratam do problema de alocação de medidores sob o ponto de vista da segurança estática do sistema. É desenvolvida uma estratégia para a alocação ótima dos medidores permitindo que o sistema ainda seja observável sob algumas possíveis contingências isoladas ou perdas de algumas medidas. Este trabalho apresenta de forma pioneira o problema de alocação de medidores como parte de um modelo de otimização baseado no problema do recobrimento.

Um estudo sobre o problema de monitoramento ótimo para caracterização de variação de tensão de curta duração em sistemas de transmissão foi desenvolvido por Almeida et al. [1,2] e Olguin et al. [8]. A solução do problema de otimização inteiro é resolvido permitindo encontrar o número mínimo de medidores e a melhor posição no sistema para reduzir o custo do sistema de monitoramento, garantindo a observabilidade dos eventos.

Para a determinação de harmônicos em um sistema de monitoramento foi proposta a utilização uma série temporal usando modelos de regressão e correlação para encontrar a localização ótima dos medidores [4]. São usadas técnicas de agrupamento na busca de conjuntos (clusters) de nós ou barras com comportamento semelhante. A metodologia pode ser aplicada tanto em sistemas de distribuição, como em sistemas de transmissão.

Rakpenthai et al. apresentam um método para alocar unidades medidoras de fasores (PMU) para a estimação dos estados de um sistema de potência [7]. É encontrado o conjunto de soluções ótimas necessárias para garantir a observabilidade do sistema mesmo com a perda de medidas ou contingências como perda de um ramo.

O presente artigo mostra a metodologia que foi usada para encontrar o número mínimo e a localização dos monitores de qualidade de energia elétrica em uma rede de transmissão. Neste trabalho procurou-se minimizar o custo do sistema de monitoramento garantindo a observabilidade total do sistema com a instalação de medidores em barras estratégicas na rede. Dessa forma se torna possível realizar estudos dos eventos de qualidade de energia elétrica (QEE).

A bibliografia analisada aponta claramente para o uso de técnicas de otimização combinatória na solução deste tipo de problema, porém as soluções apresentadas nem sempre conseguiram encontrar todas as possíveis soluções ótimas. O uso de softwares de otimização genéricos (pacotes) dificulta,

---

Este trabalho foi financiado pelo CNPq (Proc. 550178/2005-8).

Débora C. S. Reis está vinculada Mestrado em Engenharia Elétrica da UFJF, email: (debora.reis@engenharia.ufjf.br)

Paulo R. C. Villela e Carlos A. Duque estão vinculados ao Departamento de Circuitos Elétricos da UFJF, Juiz de Fora MG, Brazil, 36 036 330. Fone: (+55) 32-32293442, email: (paulo.villela@engenharia.ufjf.br), (carlos.duque@ufjf.edu.br)

na maioria das vezes, o conhecimento dos meandros dos algoritmos utilizados na busca da solução e a sua adaptação a casos especiais dada a impossibilidade de se conhecer ou alterar o código de programação. Dessa forma, optou-se pelo desenvolvimento de um algoritmo *branch and bound* (B&B) para determinar todas as soluções exatas de custo mínimo.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: A Seção II apresenta a modelagem do problema, na Seção III exemplifica-se a técnica utilizada, na Seção IV é apresentado o algoritmo proposto, na Seção V os resultados das simulações. As conclusões deste trabalho são apresentadas Seção VI.

## II. MODELAGEM DO PROBLEMA

Esta seção tem o objetivo de apresentar a modelagem realizada para a o problema de alocação de monitores de QEE. O problema encontrado recai em um dos problemas clássicos da otimização combinatória, que é o problema do recobrimento (PR) [11], que pode ser descrito matematicamente como segue

$$\text{Função Objetivo: } \min z = \sum_{j=1}^n c(j) \cdot x(j) \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (1)$$

em que  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis.

$$\text{Restrições: } s.a. \sum_{j=1}^n d(i, j) \cdot x(j) \geq 1 \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \quad i=1, \dots, m \quad (2)$$

$$0 \leq x(j) \leq 1 \quad (3)$$

$$x(j) \text{ inteiro para } j=0, 1, \dots, n \quad (4)$$

em que  $\mathbf{D}$  é a matriz de densidade do problema de recobrimento.

O PR aplicado ao de alocação de monitores pode ser visto como a necessidade de se instalar o número mínimo de medidores em uma rede do sistema elétrico de potência (SEP), mas garantindo que será possível observar todas as tensões e correntes do sistema, necessárias para a análise da QEE.

A modelagem proposta aqui está fortemente apoiada em [9-10]. Nestes artigos os autores propuseram uma modelagem para o problema de alocação de monitores de QEE baseado na topologia do sistema. Por esta razão toda a metodologia apresentada só é válida se a topologia do sistema não for alterada. Esta restrição não compromete o uso do método numa das principais aplicações da QEE que é a localização das fontes “poluidoras” da rede e que deve ser feita com a topologia não alterada.

Inicialmente é preciso definir quais são as possíveis localizações dos monitores de QEE na rede de interesse. Considerou-se que eles só deveriam ser instalados nas barras do sistema. Em seguida, é preciso identificar qual é o custo associado à instalação em cada barra do sistema. Assim, o problema se torna o de encontrar o número mínimo de medidores a ser instalado para que o custo total do sistema de monitoramento seja o menor possível e em qual ou quais barras será feita essa instalação.

Além disso, outra característica fundamental do PR aplicado é que todas as tensões e correntes do sistema devem

ser “cobertas” por pelo menos um medidor. Isso significa que pelo menos um medidor deve medir ou estimar cada uma das variáveis de estado do problema, que são a tensão em cada barra e a corrente em cada linha de transmissão.

Inicialmente, considere um sistema com  $n$  barras,  $L$  linhas e  $m$  variáveis de estado. O número total de variáveis de estado será igual à soma do número de barras e linhas,  $m = n + L$ . Nos próximos itens serão destacados cada um dos vetores ou matrizes necessários para a formulação do problema.

### A. Vetor de Existência

O vetor de existência é um vetor binário de dimensão  $n \times 1$  que representa a instalação ou não do monitor naquele barramento, cada elemento deste vetor é definido por (5),

$$x(j) = \begin{cases} 1, & \text{se o monitor é instalado na barra } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

O vetor de existência é dado por (4),

$$\mathbf{x} = [x(1) \quad x(2) \quad \dots \quad x(n)]^T \quad (6)$$

### B. Vetor de custo

Para a instalação de cada um dos monitores existe um custo associado, que está representado no problema pelo vetor de custos  $\mathbf{c}$ , (8), sua dimensão é  $1 \times n$  representando o número total de regiões possíveis de instalação, ou seja, o número total de barras do sistema. Cada elemento deste vetor pode ser definido como segue

$$c(j) = \text{custo de instalação do monitor na barra } j. \quad (7)$$

E o vetor é dado por

$$\mathbf{c} = [c(1) \quad c(2) \quad \dots \quad c(n)] \quad (8)$$

### C. Função Objetivo

O objetivo deste problema é minimizar o custo total do sistema de monitoramento, que é dado pela soma do custo de instalação de cada um dos medidores, assim a equação objetiva é descrito como em (1), repetida aqui por conveniência.

$$\min z = \sum_{j=1}^n c(j) \cdot x(j) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (9)$$

### D. Restrições

As restrições deste problema precisam garantir que todas as variáveis de estado sejam medidas ou calculadas por pelo menos um monitor de QEE, isso é feito usando o conceito de observabilidade. É necessário que todas as variáveis de estado, tensões nas barras e correntes nas linhas de transmissão, sejam observáveis. Para garantir a observabilidade do sistema dois lemas, que são conseqüências das leis de Ohm, são apresentados [9-10]:

Lema 1: “Se a tensão em uma barra e a corrente através da linha que sai dela são observáveis, então a tensão na outra barra (barra remota) também é observável”.

Lema 2: “Se a tensão ao longo da linha é observável, então a corrente através da linha é observável”.

A partir do lema 1 pode-se definir a matriz de conectividade **A**. Esta matriz é usada como uma matriz auxiliar na construção da matriz de densidade, **D**, do PR e representa a observabilidade das variáveis de estado que correspondem à tensão nas barras. Sua dimensão é definida pelo número total

de variáveis de estado e pelos locais possíveis de instalação (número de barras), portanto  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$ . Sua coluna  $k$  representa o monitor instalado na barra  $k$  e sua linha  $r$  representa a variável de estado, podendo ser tensão na barra ou corrente na linha. Cada elemento desta matriz é definido em (10).

$$a(r, k) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \text{ é observada pelo monitor } k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

A partir do lema 2, define-se as matrizes de conectividade,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$ , representando a necessidade de observar as tensões nas barras genéricas  $j$  e  $k$ , considerando-as interconectadas. Estas matrizes são usadas como auxiliares na construção da matriz de densidade e representam a co-observabilidade das variáveis de estado que correspondem à correntes nas linhas de transmissão. Assim é possível garantir que  $i_{jk}$  será observável. A dimensão das matrizes  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  é  $m \times n$ , a mesma da matriz  $\mathbf{A}$ . Sua coluna  $k$  representa o monitor instalado na barra  $k$  e sua linha  $r$  representa a variável de estado  $r$  referente à corrente  $i_{jk}$  na linha. Cada linha dessas matrizes é definida em (11) e (12).

$$\mathbf{B}_j(r) = \begin{cases} \mathbf{A}(j), & \text{se } r \text{ representa } i_{jk} \text{ e as barras } k \text{ e } j \text{ são conectadas,} \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_k(r) = \begin{cases} \mathbf{A}(k), & \text{se } r \text{ representa } i_{jk} \text{ e as barras } k \text{ e } j \text{ são conectadas,} \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (12)$$

Algumas observações devem ser feitas a respeito da montagem dessas matrizes

1.  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  só são definidas para as variáveis de estado que representam corrente. Para as demais linhas representando tensão, o valor do elemento é zero.
2. Para a montagem das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$ , as variáveis de estado do sistema devem ser escritas na seguinte ordem: tensão nas barras em ordem crescente de numeração das mesmas e correntes com os índices em ordem crescente.

Dessa forma é possível construir a matriz de densidade do PR para o problema de alocação de monitores.

A matriz de densidade terá uma dimensão igual ao número de barras ou variáveis de tensão,  $n$ , mais duas vezes o número de linhas,  $2L$ , para representar a variável de corrente que depende da tensão em dois barramentos,  $j$  e  $k$ , genericamente. Ou melhor, a dimensão da matriz de densidade será  $(n+2L) \times n$ .

Pode-se descrevê-la, portanto, da seguinte maneira

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1:n),xn} \\ \mathbf{A}_{(L:m),xn} + \mathbf{B}_{j(L:m),xn} \\ \mathbf{A}_{(L:m),xn} + \mathbf{B}_{k(L:m),xn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que  $\mathbf{A}_{(1:n),xn}$  é a submatriz obtida a partir da matriz de conectividade das linhas 1 até  $n$  e todas as colunas,  $\mathbf{A}_{(L:m),xn}$  é a submatriz obtida a partir da matriz de conectividade das linhas  $L$  até  $m$  e todas as colunas,  $\mathbf{B}_{j(L:m),xn}$  e  $\mathbf{B}_{k(L:m),xn}$  são

as submatrizes obtidas a partir das matrizes de conectividade das linhas  $L$  até  $m$  e todas as colunas.

### III. EXEMPLO

Usando a modelagem apresentada, será feito um exemplo nesta seção de uma rede de transmissão com parâmetros de carga e geração desconhecidos bem simplificada, com somente três barras e duas linhas, Fig. 3, para ilustrar passo a passo o problema de recobrimento aplicado à alocação de monitores de qualidade de energia.

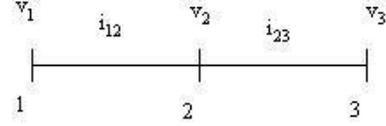


Fig. 3. Diagrama unifilar de uma rede de transmissão com três barras.

Foi utilizado o software MatLab® para a montagem da matriz de densidade do problema, com o objetivo de não limitar o tamanho da rede estudada. Para realizar o cálculo dos vetores de observabilidade e co-observabilidade, foi usada uma matriz de entrada de dados, contendo em cada linha o número das barras que conectava cada linha de transmissão. Portanto, o número de linhas desta matriz é igual ao número de linhas de transmissão do sistema e o número de colunas é igual a dois, representando o índice em ordem crescente para criar um padrão de notação.

#### A. Rede de três barras e duas linhas

Inicialmente, para evidenciar a modelagem das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  usa-se o sistema da Fig. 3. A sua representação está feita através de um diagrama unifilar simplificado, porque não serão necessários os conhecimentos dos seus parâmetros para a elaboração do PR, somente da sua topologia para indicar como as barras estão conectadas.

Seus índices são os seguintes,  $n = 3$ ,  $L = 2$  e  $m = 5$ . As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  obtidas estão mostradas em (14), (15) e (16). Suas linhas representando as variáveis de estado, tensão ou corrente e as colunas os possíveis locais de instalação, ou seja, as três barras do sistema de teste.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{12} \\ i_{23} \end{matrix} \end{matrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{12} \\ i_{23} \end{matrix} \end{matrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{12} \\ i_{23} \end{matrix} \end{matrix} \quad (16)$$

Com essas matrizes prontas é possível construir a matriz de densidade e elaborar o PR para o sistema da Fig. 3, a este problema original denominaremos  $P_0$ .

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_0 \quad \min \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ \text{Sujeito a} \\ 1) x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2) x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ 3) x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4) 2x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 5) x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 6) 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 7) 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 8) x_1 \in \{0,1\} \\ 9) x_2 \in \{0,1\} \\ 10) x_3 \in \{0,1\} \end{array} \quad (15)$$

Com o PR pronto simula-se o algoritmo para encontrar as soluções, que se destacam por conter o número mínimo de medidores e quais são suas possíveis localizações neste sistema.

#### IV. ALGORITMO DE SOLUÇÃO

Problemas do tipo de recobrimento são naturalmente problemas de programação inteira (PPI), porém, estes são ditos “intratáveis” e se enquadram na classe dos problemas mais difíceis de otimização combinatória existentes. Possuem inúmeras aplicações especialmente na área de localização, alocação e roteamento [11, 12].

Com o avanço tecnológico dos computadores em geral, possibilitou-se o desenvolvimento de algoritmos que usam diversas técnicas para solucionar PPI. Para cada um dos tipos existem algoritmos específicos de solução, como os mostrados em [13-17], mas neste trabalho buscou-se um algoritmo exato de solução.

Isto ocorreu porque no problema de alocação de monitores usa-se o algoritmo de solução uma única vez para cada rede elétrica sob estudo e o objetivo principal é encontrar todas as soluções possíveis para se fazer uma análise da redundância das medidas e análises de pós-otimização. Além disso, o uso de um pacote de otimização foi descartado, porque devido às suas limitações internas, eles não encontram todas as soluções viáveis de alocação.

Desta forma, usou-se um algoritmo *branch and bound* que fornece todas as soluções possíveis de alocação de monitores de qualidade de energia. Este algoritmo foi implementado em linguagem MatLab®.

#### A. Formulação

Achar todas as soluções ótimas de  $P^0$  requer averiguar, a princípio, todas as  $2^n$  soluções possíveis para as variáveis binárias  $x_j$ . Nem todas estas possíveis soluções são viáveis, isto é, satisfazem não somente às restrições (3), mas também às restrições (4) do problema  $P^0$ .

Por exemplo, num problema  $P^0$  com apenas duas variáveis binárias  $x_1$  e  $x_2$ , o número de soluções inteiras possíveis é 4. Elas estão representadas na Fig. 4 a seguir pelos vértices em cor vermelha.

A área esverdeada é o espaço das soluções viáveis do problema  $P^0$  relaxado (denotado por  $\underline{P}^0$ ), isto é, aquele onde as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  podem assumir qualquer valor real entre 0 e 1, isto é,  $0 \leq x_1 \leq 1$  e  $0 \leq x_2 \leq 1$ . A solução ótima do problema  $\underline{P}^0$  é, neste exemplo, o vértice na cor verde e cujo valor ótimo é  $\underline{Z}^0$ .

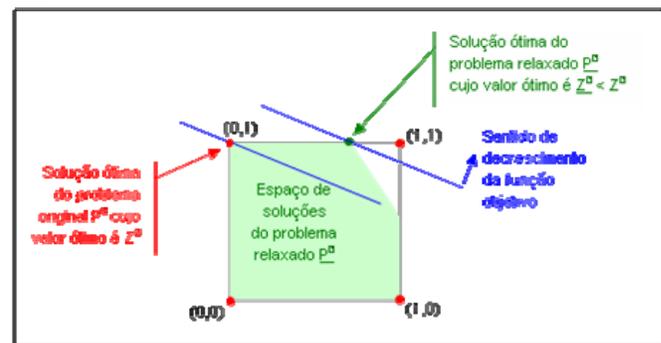


Fig. 4. Espaço de soluções do problema  $P^0$ .

As soluções inteiras viáveis do problema  $P^0$  são os vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,1)$ . O vértice  $(1,1)$  não é uma solução viável para  $P^0$ . A solução ótima do problema  $P^0$  é, neste exemplo, o ponto  $(0,1)$  de valor  $Z^0$ .

O valor  $Z^0$  é menor que o valor  $\underline{Z}^0$  da solução ótima do problema relaxado  $\underline{P}^0$ . Esta é uma propriedade importante que relaciona todo e qualquer problema linear inteiro com seu correspondente relaxado, isto é, onde as condições de integralidade foram suprimidas. Nos problemas de minimização o valor ótimo ( $Z^0$ ) do problema linear inteiro original é maior do que valor ótimo ( $\underline{Z}^0$ ) do correspondente problema relaxado. Portanto resolvendo-se o problema linear relaxado obtém-se um limitante superior ( $\underline{Z}^0$ ) para o valor ótimo do problema original ( $Z^0$ ). O cálculo destes limitantes superiores (*bounds*) é um passo importantíssimo na construção dos algoritmos do tipo *branch and bound*.

A técnica utilizada pelos algoritmos do tipo *branch and bound* consiste em buscar soluções ótimas do problema  $P^0$  utilizando-se dois procedimentos: particionamento (*branching*) e poda (*bound*).

O particionamento nada mais é do que a divisão do espaço de soluções do problema original em espaços menores, isto é, com um menor número de soluções possíveis a serem averiguadas.

Por exemplo, o problema original  $P^0$  com  $n$  variáveis pode ser particionado nos problemas:  $P^1 = \{P^0 \mid x_i = 0\}$  e  $P^2 = \{P^0 \mid x_i = 1\}$  onde  $x_i$  é uma variável qualquer do problema  $P^0$ . Cada um dos dois problemas gerados a partir de  $P^0$  tem  $(n-1)$  variáveis e, portanto,  $2^{n-1}$  soluções possíveis a serem investigadas.

A lógica do particionamento do espaço de soluções reside na esperança de que é mais fácil resolver dois problemas combinatórios menores do que o problema que lhes deu origem.

A Fig. 5 a seguir ilustra uma árvore que simboliza o particionamento do problema original  $P^0$  nos problemas  $P^1$  e  $P^2$  e estes nos problemas  $P^3$  e  $P^4$ ; e  $P^5$  e  $P^6$  respectivamente, fixando-se em cada passo uma das variáveis em 0 ou 1.

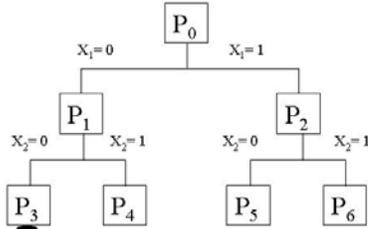


Fig. 5. Árvore de particionamento com os nós correspondentes a  $P^0$ ,  $P^1$  e  $P^2$ ;  $P^3$  e  $P^4$ ; e  $P^5$  e  $P^6$ .

Cada um dos problemas  $P^k$  será resolvido ou novamente particionado gerando dois outros problemas na árvore, que serão resolvidos ou particionados; e assim sucessivamente.

Caso o problema qualquer  $P^k$  seja resolvido, o valor de sua solução será denotado por  $Z^k$  e a solução ótima correspondente pelo vetor  $X^k$ . Chamaremos de  $Z^L$  o menor valor obtido entre os valores  $Z^k$  calculados. Assim  $Z^L$  e sua correspondente solução  $X^L$  armazenam a melhor solução obtida até um determinado momento.

Num caso extremo o particionamento poderá chegar a gerar  $2^n$  problemas onde todas  $n$  variáveis foram fixadas em 0 ou 1 e desta forma suas respectivas soluções são conhecidas. Evidentemente isto deve ser evitado ao máximo, pois tem um custo computacional altíssimo.

A decisão de particionar cada um dos problemas  $P^k$  é precedida pelo cálculo de um limitante superior do valor ótimo  $Z^k$  deste problema. O limitante superior nada mais é do que o valor ótimo  $Z^k$  do problema  $P^k$  relaxado. Como se sabe  $Z^k \geq \underline{Z}^k$  num problema de minimização. Se for conhecida uma solução  $X^L$  de valor  $Z^L$  de tal sorte que  $\underline{Z}^k > Z^L$ , isto é, o limitante superior do valor ótimo de  $P^k$  é pior (maior no caso de um problema de minimização) do que o valor de uma solução já encontrada, não terá sentido procurar a solução ótima a partir do problema  $P^k$  e sendo assim ele deve ser podado, isto é, ele não será particionado.

## V. RESULTADOS OBTIDOS

Usando o algoritmo apresentado para encontrar a solução dos problemas de alocação considerando o valor de custo de cada monitor igual a 1, encontrou-se as soluções apresentadas na Tabela I.

A simulação foi feita com base na topologia das redes de teste IEEE 14, 30 e 57 barras.

TABELA I  
RESULTADOS OBTIDOS DE SOLUÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE MONITORES  
CONSIDERANDO CUSTOS DE INSTALAÇÃO IGUAIS

Rede	Nº Mínimo de Monitores	Nº de Soluções Ótimas
IEEE – 14 barras	4	2
IEEE – 30 barras	10	858
IEEE – 57 barras	17	3347

Para o exemplo de 3 barras da Fig. 2 a solução seria a de instalar somente um monitor na barra 2. Já para o sistema IEEE 14 barras, a primeira possível alocação seria instalar monitores nas barras 2, 6, 8 e 9 e a segunda seria instalar nas barras 2, 6, 7 e 9.

Percebeu-se que a consideração de todos os custos iguais, especificamente iguais a um, não foi uma boa alternativa. Esta é uma consideração pouco prática, visto que o custo de instalação em barras distintas é diferente devido à localização e importância de cada barra, tipo de subestação, equipamentos e disponibilidade de canal de comunicação e envio de dados previamente existentes. Outro ponto importante de se destacar é que esta consideração fez com que o sistema ficasse altamente combinatório, já que o valor da função objetivo é o mesmo para qualquer combinação que se instale o mesmo número de monitores. Bom exemplo disso é o número de soluções encontradas para os sistemas de 30 e 57 barras IEEE, Tabela I, um total de 858 e 3347, respectivamente, soluções ótimas, ou seja, possíveis alocações diferentes de monitores e que, teoricamente, teriam o mesmo custo. Por isso também não se simulou para sistemas com um número de barras maior e o custo de instalação de cada monitor igual, porque o crescimento do número de nós é exponencial e o número de soluções viáveis seria gigantesco.

Desta forma, consideraram-se os custos de instalação diferentes em cada uma das barras. Esta consideração foi feita porque uma grande parcela do custo de instalação se refere ao número de transformadores de tensão e corrente necessários para se adquirir o sinal da rede elétrica, assim, quanto maior o número de linhas em cada barra, maior será o número de transformadores necessários. [10, 11] O resultado é mostrado na Tabela II.

Os resultados obtidos para esta simulação foram mais próximos dos que seriam obtidos na prática em simulações de redes do SEP real, porque o custo é variável e existem regiões em que a instalação de um monitor seria inviável.

Observando a Tabela II, nota-se que somente para a rede IEEE 14 barras o número de soluções possíveis aumentou, isso se deve à características específicas de sua topologia. Para todas as outras redes a consideração de custos diferenciados, fez com que o número de soluções ótimas fosse menor, em outras palavras, aumentou-se a restrição do problema de otimização.

TABELA II  
RESULTADOS OBTIDOS DE SOLUÇÃO DO NÚMERO MÍNIMO DE MONITORES  
CONSIDERANDO CUSTOS DE INSTALAÇÃO DIFERENTES

Rede	Nº Mínimo de Monitores	Nº de Soluções Ótimas
IEEE – 14 barras	5	14
IEEE – 30 barras	12	4
IEEE – 57 barras	18	5

Embora, de uma forma geral o número de monitores necessários tenha aumentado, o custo de instalação é o mínimo possível para qualquer uma das soluções encontradas. Isto significa que qualquer solução atende a necessidade de observar todas as variáveis de estado da rede e o que definirá qual será a solução escolhida é o conhecimento da rede sob estudo.

## VI. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta um algoritmo do tipo *branch and bound* de alocação de medidores de qualidade de energia elétrica numa rede de transmissão para minimizar o custo de implantação do sistema de monitoramento. Baseada na topologia da rede a metodologia proposta garante a sua observabilidade frente aos eventos de QEE que possuem a topologia inalterada, como o estudo de localização de harmônicos, por exemplo.

A técnica matemática utilizada partiu da modelagem do problema como um de otimização combinatória (programação linear e inteira), mais especificamente como um problema de recobrimento, resolvido através de um algoritmo do tipo *branch and bound*, desenvolvido pelos autores. O algoritmo foi programado em MatLab® usando para cálculo dos limitantes superiores a rotina interna para resolução de problemas de programação linear. Futuramente é desejável que o algoritmo tenha todo seu código integralmente desenvolvido de forma a permitir o uso de técnicas de pós-otimização dos problemas de programação linear gerados.

O algoritmo proposto foi simulado usando como base as redes IEEE de 14, 30 e 57 barras para se encontrar a alocação de custo mínimo dos monitores de QEE. Ele se mostrou flexível o suficiente para suportar mudanças na modelagem do problema de otimização combinatória, como alterações do custo dos monitores, revelando-se uma ferramenta adequada para desenvolvimento de casos reais de interesse de concessionárias de energia elétrica.

## VII. REFERÊNCIAS

[1] Almeida, C.F. M., “Metodologia para a Monitoração Eficiente de Variações de Tensão Curta Duração em Sistemas Elétricos de Potência”, Dissertação de Mestrado, USP, São Paulo, 2007.

[2] Almeida, C.F. M., Camilo, L., Kagan, N., “Metodologia para a Alocação Ótima de Medidores de Qualidade de Energia em Redes de Transmissão e Subtransmissão para a Monitoração de VTCDs devido a curto-circuitos”, VI Seminário Brasileiro sobre Qualidade da Energia Elétrica, 2005.

[3] Abur, A., Magnano, F. H., “Optimal Meter Placement Against Contingencies”, *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, 2001.

[4] Ammer, C., Renner, H., “Determination of the Optimum Measuring positions for Power Quality Monitoring”, *11th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, 2004.

[5] Akabane, K., Nara, K., Mishima, Y. Tsuji, K., “Optimal Geographical Allocation of Power Quality Control Centers by Voronoi Diagram”, *14th Power Systems Computation Conference*, Sevilla, Spain, June, 2002.

[6] Madtharad, C., Premrudeepreechacharn, Watson, N. R., Saeng-Udom, R., “An Optimal Measurement Placement Method for Power System Harmonic State Estimation”, *IEEE Transaction on Power Delivery*, Abril de 2005.

[7] Rakpenthai, C., Premrudeepreechacharn, S., Uatrongjit, S., Watson, N. R., “An Optimal PMU Placement Method Against Measurement Loss and Branch Outage”, *IEEE Transaction on Power Delivery*, Janeiro de 2007.

[8] Olguin, G., Vulnovich, F., Bollen, M. H. J., “An Optimal Monitoring Program for Obtaining Voltage Sag System Indexes”, *IEEE Transactions on Power Systems*, fevereiro de 2006.

[9] Eldery, M. A., El-Saadany, E. F., Salama, M. M. A., Vannelli, A., “A Novel Power Quality Monitoring Allocation Algorithm”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, abril de 2006.

[10] Eldery, M. A., El-Saadany, E. F., Salama, M. M. A., “Optimum Number and Location of Power Quality Monitors”, *IEEE International Conference on Harmonics and Quality of Power*, 2004.

[11] Goldberg, M. C., Luna, H. P. C., *Otimização combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*, 2 ed, Editora Elsevier, 2005, p. 409-423.

[12] Kuzjurin, N. N., “Combinatorial Problems of Packing and Covering and Related Problems of integer Linear Programming”, *Journal of Mathematical Sciences*, 2002

[13] Coudert, O., Madre, J. C., “New Ideas for Solving Covering Problems”, *32 IEEE Design Automation Conference*, 1995.

[14] Plessl, C., Platzner, M., “Custom Computing Machines for the Set Covering Problem”, *IEEE Symposium on field-Programmable Custom Computing Machines*, 2002.

[15] Caprara, A., Fischetti, M., Toth, P., “Algorithms for the Set Covering Problem”, *Annals of Operations Research*, 1998.

[16] Manquinho, V. M., Marques-Silva, J. P., “Search Pruning techniques in SAT-Based Branch-and-Bound Algorithms for the Bin Packing Problem”, *IEEE Transactions on computer-Aided Design of integrated Circuits and Systems*, maio de 2002.

[17] Fu, Z., Malik, S., “Solving the Minimum-Cost Satisfiability Problem Using SAT Based Branch-and-bound Search”, *IEEE International Conference on Computer-Aided Design*, novembro de 2006.

[18] Villela, P. R. C., Instalação de Postos de Atendimento e Venda de Insumos numa Cooperativa Agrícola: Uma aplicação do Problema da Mochila 0-1, Dissertação de Mestrado em Ciências, COPPE/UFRJ, 1983.

[19] J. Szczupak, “Electrical Power Network Pollution Estimation”, *T&D Latin America 2004*, artigo 361, Novembro de 2004, São Paulo, SP.

[20] A. C. Parsons, W. M. Grady, E. J. Powers and J. C. Soward, “A Direction Finder for Power Quality Disturbances Based upon Disturbance Power and Energy”, *Proceedings of the 8th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, pp. 693 to 699, Grécia, Outubro de 1998.

[21] A. Teshome, “Harmonic source and type identification in a radial distribution system”, *Proc. 1991 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, pp. 1605-1609.

[22] H. Ma and A. A. Girgis, “Identification and tracking of harmonic sources in a power system using a kalman filter”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, no. 3, pp. 1659-1665, Julho de 1996.

[23] Kent K. C. Yu, N. R. Watson, and J. Arrillaga, “An Adaptive Kalman Filter for Dynamic Harmonic State Estimation and Harmonic Injection Tracking”, *IEEE Tran. On Power Delivery*, Abril de 2005, pp.1577- 1584.