

Algoritmo para Cálculo da Distorção Harmônica por Meio da Transformada Rápida de Hartley

Francisco Assis Nascimento, *Member, IEEE*, Pedro A. Berger e Adson F. da Rocha, *Member, IEEE*

Abstract—In this work is presented a fast algorithm for digital computation of harmonic distortions that requires only real operations. In the classical approach, the Discrete Fourier Transformed (DFT) computed with the Fast Fourier Transform algorithm is used to calculate the harmonic distortion. In the proposed method, DFT is replaced by the Discrete Hartley Transformed implemented with its fast computational algorithm, the Fast Hartley Transform (FHT) which requires only real arithmetic operations. The FHT algorithm has also the advantage that it is necessary only a half the amount of dynamic memory needed to store the transformed coefficient vector. The harmonic distortion computed by the FHT is identical to classical algorithm using FFT. Computational simulations and microprocessor implementations showed that the proposed algorithm has several advantages over the traditional algorithms.

Index Terms—Discrete Fourier Transform, Discrete Hartley Transform, harmonic distortion, fast algorithm, signal digitalization.

I. NOMECLATURA

A nomenclatura utilizada neste trabalho é apresentada a seguir:

DHV_T – Distorção Harmônica Total de Tensão.

DHI_T – Distorção Harmônica Total de Corrente.

m – Índice da componente harmônica.

V_m – m -ésima componente harmônica de tensão (V)

V_1 – Componente de tensão elétrica fundamental (V).

I_m – m -ésima componente harmônica de corrente elétrica (A).

M – Quantidade de harmônicos contabilizados no cálculo da distorção harmônica.

I_1 – Componente de corrente elétrica fundamental (A)

DFT (Discrete Fourier Transform) – Transformada Discreta de Fourier.

FFT (Fast Fourier Transform) – Transformada Rápida de Fourier.

Este trabalho foi financiado pela ELETRONORTE através do Fundo Setorial de Energia Elétrica da ANEEL.

Francisco Assis de Oliveira Nascimento e Adson Ferreira da Rocha são professores do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília - UnB (assis@unb.br; adson@unb.br).

Pedro de Azevedo Berger é professor do Ciência da Computação da Universidade de Brasília - UnB (e-mail: berger@cic.unb.br)

DHT (Discrete Hartley Transform) – Transformada Discreta de Hartley.

FHT (Fast Hartley Transform) – Transformada Rápida de Hartley.

$x[n]$ – seqüência de amostras do sinal que constitui uma janela (ou vetor) com N elementos.

$X[k]$ – k -ésimo coeficiente de Fourier obtidos a partir da FFT.

$H[k]$ – k -ésimo coeficiente de Hartley obtido a partir da FHT.

II. INTRODUÇÃO

O suprimento e a manutenção de sinais puramente senoidais com amplitudes e frequências constantes e não sujeitas às variações espúrias constituem meta das concessionárias de energia elétrica no que diz respeito ao estabelecimento de uma qualidade da energia ofertada ao consumidor.

Entre as perturbações que causam preocupação às concessionárias de energia elétrica e aos consumidores, está a distorção harmônica de tensões e de correntes elétricas as quais se apresentam como fenômeno de estado permanente. Este tipo de distorção é normalmente causado pela operação de cargas com características não-lineares. Geralmente a distorção harmônica também se propaga pelo sistema elétrico provocando distorções de tensão em diversos pontos e ocasionando aquecimentos anormais em transformadores, banco de capacitores, condutores neutros, motores de indução, interferências em equipamentos eletrônicos de controle, comunicação, microcomputadores e equipamentos eletrônicos diversos. Esse fenômeno aponta para uma diminuição da vida útil de dispositivos da rede elétrica e das cargas em geral.

Atualmente diversos equipamentos embasados em microprocessados que utilizam técnicas de processamento digital de sinais é utilizada para mensurar a qualidade da energia elétrica. Um dos parâmetros mensurados é a distorção harmônica. Para o cálculo desse parâmetro é utilizado algoritmo baseado na transformada discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform) implementada por meio de algoritmo rápido (FFT - Fast Fourier Transform).

Este trabalho apresenta um algoritmo para o cálculo da distorção harmônica cujo resultado é idêntico ao algoritmo implementado por meio da FFT. Contudo, o algoritmo proposto, é mais eficiente em termos computacionais, utiliza somente operações reais enquanto a FFT utiliza aritmética

complexa e necessita menor quantidade de memória dinâmica para a sua implementação, quando também comparada com a FFT.

III. CÁLCULO COMPUTACIONAL DA DISTRORÇÃO HARMÔNICA VIA FFT

A distorção harmônica é definida com base no espalhamento espectral levando em conta a energia da frequência fundamental e das componentes harmônicas de ordem superior.

As equações 1 e 2 definem as distorções harmônicas para a tensão e para a corrente.

$$DHV_T = \sqrt{\frac{\sum_{m=2}^M V_m^2}{V_1^2}} \cdot 100\% \quad (1)$$

$$DHI_T = \sqrt{\frac{\sum_{m=2}^M I_m^2}{I_1^2}} \cdot 100\% \quad (2)$$

Os instrumentos digitais que calculam a distorção harmônica utilizam a DFT calculada por meio da DFT como mostrado a seguir.

A. A Transformada Discreta de Fourier

A transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform) ferramenta muito utilizada na análise de sinais em tempo discreto pode ser definida como:

$$X[k] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.a)$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.b)$$

onde $x[n]$ $0 \leq n \leq N-1$, representa a seqüência real que corresponde ao sinal de entrada, $X[k]$ corresponde á seqüência complexa de coeficientes de Fourier obtidos a partir da Transformada e,

$$e^{jz} = \cos(z) + j \operatorname{sen}(z) \quad (3.c)$$

representa as diversas seqüências exponenciais complexas da base de Fourier.

Na sua forma direta a DFT possui complexidade $O(N^2)$. Entretanto, utilizando o algoritmo rápido da FFT esta complexidade se reduz a $O(N \log_{10}(N))$. A FFT torna o procedimento bastante atrativo. Entretanto, a implementação do cálculo dos coeficientes de Fourier utiliza aritmética complexa, isso significa que as operações de adição e de multiplicação deverão proceder ao tratamento da parte real e da parte imaginária das variáveis. Também é necessário ter para os

N coeficientes resultantes do vetor de saída FFT um total de 2N posições de memória necessárias para armazenar as partes real e imaginária de cada coeficiente.

B. Formulação para Cálculo da Distorção Harmônica Discreta de Fourier

Supondo o caso especial em que o sinal de entrada seja digitalizado a uma taxa que apresente uma quantidade inteira de amostras por período da fundamental e que esta quantidade seja ainda uma potência inteira de dois. Nesta condição teremos uma amostragem no domínio das frequências exatamente sobre a frequência fundamental e sobre seus harmônicos de ordem superior. Isto significa dizer que a componente fundamental e seus harmônicos de ordem superior estarão cada um representado por um único coeficiente complexo de Fourier. Vamos tomar o exemplo onde utilizamos uma taxa de amostragem correspondendo a 128 amostras por período da fundamental, isto nos levará a uma frequência de amostragem equivalente a

$$f_a = 128 \times 60 \text{ Hz} = 7680 \text{ Hz} = 7680 \text{ amostras/segundo} \quad (4)$$

Se utilizarmos uma FFT de tamanho igual a 128 amostras (N=128). O comprimento temporal da janela de observação será igual ao período da fundamental e os coeficientes de Fourier estarão mapeados com um espaçamento em frequência igual a 60 Hz.

$$\Delta f = \frac{f_a}{2} \frac{N}{2} = \frac{f_a N}{4} = \frac{7680 \times 128}{4} = 60 \text{ Hz} \quad (5)$$

Observe que neste caso, que consideramos ideal, cada coeficiente complexo de Fourier $X[k]$ corresponderá a um múltiplo da fundamental. A figura 1 ilustra como é feito o mapeamento sobre o círculo unitário no domínio da transformada z. A cada incremento no índice de $X[k]$ tem-se um incremento associado de frequência f calculado na equação 4.

No semicírculo inferior ajustam-se os coeficientes conjugados do semicírculo superior, de forma que:

$X[0]$ corresponde ao coeficiente de e é puramente real.

$$X^*[1] = X[N-1]$$

$$X^*[2] = X[N-2]$$

•
•
•

$$X^*\left[\frac{N}{2}-1\right] = X\left[\frac{N}{2}+1\right]$$

$X[N/2]$ corresponde maior frequência representada - $f_a/2$ (64° harmônico) e é puramente real.

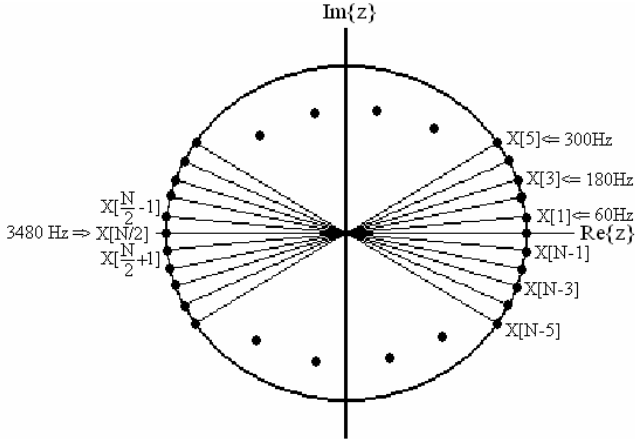


Fig. 1. Mapeamento uniforme em frequência da FFT sobre o círculo unitário no plano Z

Neste caso fica fácil o cálculo da a formulação matemática apresentada nas equações 1 e 2, pois verifica-se que

$$|X[k]|^2 = X[k].X^*[k] = X[k].X[N-k] \quad (6)$$

A distorção harmônica pode ser então calculada com base nos coeficiente de Fourier na forma

$$DHX = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\frac{N-1}{2}} X[k]X[N-k]}{X[k]X[N-1]}} \quad (7)$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\frac{N-1}{2}} (\text{Re}\{X[k]\}^2 + \text{Im}\{X[k]\}^2)}{\text{Re}\{X[1]\}^2 + \text{Im}\{X[1]\}^2}}$$

A equação 6 mostra como o cálculo da DHX (X pode ser - V - de tensão ou - I - de corrente) é calculada por meio dos coeficientes da FFT. Contudo, todos os coeficientes X[k], $0 \leq k \leq N-1$, são entidades complexas. A extração da raiz quadrada da equação 7 é implementada por meio de série truncada de Taylor.

A seguir é apresentado um algoritmo também rápido que utiliza somente aritmética real e se mostra mais eficiente para o cálculo da distorção harmônica.

IV. CÁLCULO DA DISTRORÇÃO HARMÔNICA POR MEIO DA TRANSFORMADA RÁPIDA DE HARTLEY

Originalmente proposta por Ralph V. L Hartley para tempo contínuo, a Transformada de Hartley, possui propriedades que a torna útil e atrativa para o processamento de sinais em tempo discreto. Composta por seqüências ortogonais e puramente reais, a Transformada Discreta de Hartley (DHT - *Discrete Hartley Transform*) também origina uma seqüência real de coeficientes transformados. Além disso, em face da simetria das funções de base, a transformada direta e inversa são idênticas. Isto significa dizer que, se aplicarmos duas vezes a

transformada discreta de Hartley em uma seqüência o resultado será a própria seqüência.

A. A Transformada Discreta de Hartley

A Transformada Discreta de Hartley, em sua forma direta e inversa é definida pelas seguintes equações:

$$H[k] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \text{cas} \left(\frac{2p}{N} kn \right), 0 \leq k \leq N-1 \quad (8.a)$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \text{cas} \left(\frac{2p}{N} kn \right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (8.b)$$

onde x[n] com $0 \leq n \leq N-1$, representa a seqüência que corresponde ao sinal de entrada, H[k] corresponde á seqüência de coeficientes de Hartley obtidos a partir da Transformada e, os termos associados a $\text{cas}(z) = \cos(z) + \sin(z)$ representam as diversas seqüências da base de Hartley.

Analogamente à DFT, na sua forma direta a DHT possui complexidade $O(N^2)$, e também possui algoritmo rápido conhecido FHT (*Fast Hartley Transform*) que apresenta complexidade de $O(N \log_{10}(N))$. A FHT também torna o procedimento bastante atrativo em aplicações computacionais.

A FHT também apresenta como atrativo a utilização de aritmética puramente real. Isto significa que as operações de adição e de multiplicação necessária para o cálculo da FHT serão implementadas apenas com operações matemáticas reais.

A FHT gera para um vetor de N amostras de sinal de entrada, um vetor de saída também de comprimento N, com números puramente reais.

Para o cálculo da distorção harmônica por meio da transformada rápida de Hartley devem ser observadas determinadas propriedade e relações algébricas entre os coeficientes de Hartley e de Fourier. Este assunto é tratado a seguir.

B. Relações matemáticas entre a DHT e a DFT

Observando as seqüências que constituem as bases de Fourier e de Hartley observa-se grande similaridade entre ambas que pode ser formalizado matematicamente.

Os coeficientes da transformada discreta de Hartley podem ser obtidos a partir da transformada discreta de Fourier da seguinte maneira

$$H[k] = \text{Re}\{X[k]\} - \text{Im}\{X[k]\}; k=0,1,\dots,N-1 \quad (9)$$

A parte real dos coeficientes de Fourier pode ser obtida a partir dos coeficientes de Hartley por meio de

$$\text{Re}\{X[0]\} = H[0] \quad (10.a)$$

$$\text{Re}\{X[k]\} = \frac{1}{2}(H[N-k] + H[k]); k=1,2,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (10.b)$$

$$\text{Re}\{X[N/2]\} = H[N/2] \quad (10.c)$$

Analogamente, a parte imaginária dos coeficientes de Fourier pode ser obtida a partir dos coeficientes de Hartley por meio de:

$$\text{Im}\{X[0]\} = 0 \quad (11.a)$$

$$\text{Im}\{X[k]\} = \frac{1}{2}(H[N-k] - H[k]); k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (11.b)$$

$$\text{Im}\{X[N/2]\} = 0 \quad (11.c)$$

A fase dos coeficientes de Fourier também está relacionada com os coeficientes de Hartley na forma:

$$\arg\{X[0]\} = 0 \quad (12.a)$$

$$\arg\{X[k]\} = a \tan\left(\frac{H[N-k] - H[k]}{H[N-k] + H[k]}\right); k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (12.b)$$

$$\arg\{X[N/2]\} = 0 \quad (12.c)$$

As relações apresentadas nas equações de 9 a 12 nos permitem reescrever a equação 7 utilizando somente coeficientes de Hartley como é mostrado na próxima seção.

C. Formulação para Cálculo da Distorção Harmônica via FHT

A partir das equações 9 a 12 podemos escrever

$$\begin{aligned} |X[k]|^2 &= \text{Re}\{X[k]\}^2 + \text{Im}\{X[k]\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\{H[k]^2 + H[N-k]^2\} \end{aligned} \quad (13)$$

A equação 7 pode ser reescrita na forma:

$$DHX = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\frac{N}{2}-1} (H[k]^2 + H[N-k]^2)}{H[1]^2 + H[N-1]^2}} \quad (14)$$

O resultado da equação 14 é identicamente igual ao da equação 7 e pode ser utilizada com vantagens para o cálculo da distorção harmônica.

D. Análise espectral por Meio da Transformada Discreta de Hartley

A Transformada Discreta de Hartley também pode ser interessante em aplicações onde a Transformada Discreta de Fourier é a ferramenta utilizada para análise espectral no domínio das frequências. Podemos calcular o espectro de amplitude da DFT utilizando somente coeficientes da DHT como mostrado na equação 15.

$$\begin{aligned} |X[k]| &= \sqrt{\text{Re}\{X[k]\}^2 + \text{Im}\{X[k]\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{H[k]^2 + H[N-k]^2}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

Na figura 2 é mostrado um transitório de tensão e logo abaixo o respectivo espectro de amplitude da DFT, calculado por meio da DHT. Na Fig. 2, o eixo horizontal mostra tempo para a figura superior (em quantidade de amostras do sinal original) e frequência (Hz), para a figura inferior. A taxa de amostragem é de 8000 amostras/segundo. Nos eixos verticais têm-se as respectivas amplitudes no tempo e na frequência. Estas amplitudes dizem respeito a faixa dinâmica da conversão analógico-digital e corresponde a uma representação em aritmética de ponto fixo com sinal descrito por palavra digital de 16 bits.

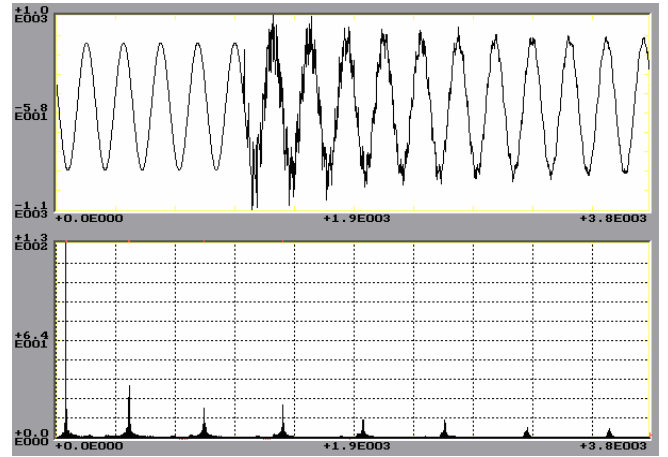


Fig. 2 Análise espectral de amplitude de Fourier implementada por meio da transformada discreta de Hartley

V. DISCUSSÃO

Para chegar aos resultados mostrados nas equações 7 e 14 foi adotada uma condição especial para a digitalização dos sinais de corrente e tensão elétricas. Neste caso utilizamos uma taxa de amostragem correspondendo a 128 amostras por período da fundamental, isto nos leva a uma discretização no domínio das frequências sincronizadas com a componente fundamental de 60 Hz e com os harmônicos de ordem superior.

A condição especial proposta para se obter as equações 7 e 14 não inviabiliza a generalidade do método. Se na digitalização do sinal temporal de corrente e/ou de tensão não tivermos uma taxa de amostragem que seja uma potência inteira de dois do período da fundamental ocorrerá um espalhamento espectral tanto na FFT quanto na FHT. Esse espalhamento dificulta o cálculo da distorção harmônica levando a erros e discrepâncias nas medidas, como têm sido mostrado em publicações [10] recentes.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi mostrada uma aplicação para a transformada discreta de Hartley onde ela substitui a

transformada discreta de Fourier (DFT) no cálculo da distorção harmônica. A DHT apresenta como vantagem sobre a DFT o fato de possuir algoritmo rápido (FHT) onde são utilizadas somente operações reais. Em uma instrumentação digital onde os cálculos são implementados em microprocessadores, a FHT também é vantajosa na medida em que utiliza metade do requisito de memória da FFT para armazenar o vetor de coeficientes transformados de saída.

VII. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer á ELETRONORTE e a ANEEL pelo suporte financeiro ao desenvolvimento deste trabalho de pesquisa.

VIII. REFERENCIAS

- [1] Bracewell, R. N. "Discrete Hartley Transform", *J. Opt. Amer.*, vol. 73, no. 12, pp. 1832-1835, Dec. 1983.
- [2] C. Robert Pinnegar, Lulu Mansinha, "Time-frequency localization with the Hartley Transform", *Signal Processing*, v.84 n.12, p.2437-2442, December 2004.
- [3] D. Sundararajan, M. O. Ahamad, and M. N. S. Swamy, "A fast FFT bit-reversal algorithm", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, II, vol. 41, pp. 701-703, October 1994.
- [4] Francisco Assis de Oliveira Nascimento e Malvar, Henrique Sarmento, "Computer Program for DHT" - Appendice A.6 of DISCRETE COSSINE TRANSFORM - ALGORITHMS AND APPLICATIONS, R. K. Rao & P. Yip, Academic Press, 1990, pp. 417- 421.
- [5] Francisco Assis de Oliveira Nascimento. "Data Compression Algorithm for Transient Recording System", *IEEE - International Symposium on Industrial Electronics - ISIE'97*, 1997, Guimarães, v. Vol. 3. p. 1126-1130.
- [6] G. Ghurumurhan, K. M. M. Prabhu, "Fixed-point fast Hartley transform error analysis", *Signal Processing*, v.84 n.8, p.1307-1321, August 2004.
- [7] H. V. Sorensen, D. L. Jones, C. S. Burrus, and M. T. Heideman, "On computing the discrete Hartley transform", *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Processing ASSP-33* (4), 1231-1238 (1985).
- [8] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus, "Real-valued fast Fourier transform algorithms", *IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Processing ASSP-35*, 849-863 (1987).
- [9] H. V. Sorensen, D. L. Jones, M. T. Heideman, and C. S. Burrus, "Real valued fast Fourier transform algorithms", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, pp. 849-863, June 1987. also in IEEE Press FFT Reprints, by P. Duhamel, 1995.
- [10] José Carlos de Oliveira; Antônio Carlos Delaiba; Peniche, Rodrigo Antônio Peniche; Carlos Eduardo Tavares. "Testes de Desempenho Funcional em Instrumentos de Medição da Qualidade da Energia Elétrica", *SNPTEE Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*, 2005, Curitiba, 2005. v. 1. p. 1-6.
- [11] M. Vetterli and P. Duhamel, "Split-radix algorithms for length - pm DFT's", *IEEE Trans. on ASSP*, vol. 37, pp. 57-64, January 1989. Also, ICASSP-88 Proceedings, pp. 1415-1418, April 1988.
- [12] Sebastião do Nascimento Neto; Anésio de Leles Ferreira Filho; Francisco Assis de Oliveira Nascimento, "Effects of the Digitalization Rate and Windowing in Quality Energy Parameters Computing", *IEEE/PES T&D 2004 Latin America*, 2004, São Paulo. *Proceedings of The IEEE/PES T&D 2004 Latin America*, 2004. p. 1-4

IX. BIOGRAFIAS



Francisco Assis de Oliveira Nascimento nasceu em 1961 em Araruama, Rio de Janeiro, Brasil. Graduiu-se em Engenharia Elétrica pela Universidade de Brasília – UnB em 1982. Obteve o título de Mestre em Ciências e Doutor em Ciências pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – CPPE/UFRJ em 1985 e 1988, respectivamente.

Atuou como pesquisador no Centro de Pesquisas Elétrica – CEPEL, no Centro Científico da IBM Brasil e no Centro de Pesquisas e Desenvolvimento para a Segurança da Comunicações – CEPESC. Atualmente é professor associado do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília – UnB onde é coordenador do Grupo de Pesquisa em Processamento Digital de Sinais – GPDS. Suas principais áreas de interesse são processamento digital de sinais e instrumentação científica.



Pedro de Azevedo Berger, nasceu em 15/02/77, no Rio de Janeiro - RJ. Possui graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Ceará em (1999), mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade de Brasília (2002) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade de Brasília (2006). Atualmente é professor adjunto no Departamento de Ciência da Computação, da Universidade de Brasília. Tem experiência na

área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Sistemas de Telecomunicações, atuando principalmente nos seguintes temas: Processamento Digital de Sinais, Compressão de Dados e Comunicação Digital.



Adson Ferreira da Rocha obteve o grau de Engenheiro Eletricista em 1988, pela Universidade de Brasília, o grau de Mestre em Engenharia Elétrica em 1991, pela Universidade Estadual de Campinas e o grau de Doutor em Engenharia Biomédica em 1997, pela University of Texas at Austin.

Atualmente ocupa a posição de Professor Associado no Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília. Suas principais áreas de interesse são o processamento digital de sinais e a instrumentação eletrônica.