

# Análise de Sensibilidade para Alocação de Equipamentos em Redes Elétricas sob Distorções Harmônicas

A. C. BALEEIRO ALVES, W. N. VALLE, P. L. CAVALCANTE, E. B. DOS SANTOS

**Abstract** – This work concerns about a methodology for allocation of harmonic filter and capacitor bank in electric distribution systems, based on sensitivity analysis and spectral decomposition of the harmonic nodal admittance matrix. The principal results obtained from application this mathematical tool is an ordered list of the most sensitivity buses of electric power distribution system to perturbation from shunt equipments considering existing harmonics currents sources. The procedure indicates the nodal localization for filtering with better results for voltage total harmonic distortion and those not indicated position of shunt capacitor in the feeder. This tool is important for planning studies, be in the context of decision support in the task allocation of a filtering equipment or to provide a start solution if are applied meta-heuristics. The method approached in this paper is mentioned in the literature as Inherent Structure Theory. The meaningful contribution consists in propose a formal proof of referred method, following the matrix algebra concepts. Finally, after the mathematical developments, tests with electric systems are presented with the aim to confirm the efficacy of the method. To validate the algorithm, simulations are made using PQF 7.

**Index Terms** – Harmonic nodal admittance matrix, eigensystems, sensitivity analysis, inherent theory.

## I. INTRODUÇÃO

Há anos, os filtros harmônicos passivos *shunt* constituem-se na alternativa mais atraente para mitigar as distorções harmônicas em instalações elétricas industriais, sendo também eficazes para compensar a potência reativa fundamental [1]. Porém, somente nos últimos anos esta solução vem sendo adotada para melhorar a qualidade da energia elétrica também em alimentadores dos sistemas de distribuição das concessionárias, conforme relatam os autores da referência [2]. Diferente da aplicação industrial em que o filtro normalmente é colocado próximo à fonte geradora de harmônicos, o problema de alocar o filtro no alimentador implica na decisão de escolher o ponto de instalação em uma rede geograficamente extensa, onde geralmente se dispõe de uma enorme quantidade de pontos possíveis, tendo em vista que as fontes de distorção

encontram-se disseminadas. Outro problema de alocação igualmente difícil surge quando desejamos instalar capacitores em um alimentador com o objetivo de sanar deficiências do perfil de tensão. Todavia, como na atualidade a distorção harmônica das correntes elétricas é uma realidade, a inserção de capacitores em derivação pode contribuir para piorar o desempenho quanto à qualidade ou em relação à vida útil do próprio banco: seja pelo agravamento das distorções harmônicas, seja pelo risco de ressonância com as partes indutivas da rede elétrica [3]. A metodologia empregada neste trabalho tem sua origem na Teoria Inerente à Estrutura (TIE) proposta por M.A. Laughton em 1964 [4], que foi originalmente apresentada para a análise de sistemas dinâmicos, e posteriormente estendida à análise de sensibilidade da tensão fundamental a variações de potência reativa [5,6]. Carpinelli *et alii* empregaram este método na solução do problema de alocação de filtros e de fontes harmônicas, conforme mostra a referência [7].

Os problemas de alocação de equipamentos em redes elétricas são de natureza combinatória e são não-convexos. A solução desses problemas para redes elétricas reais pode conduzir a tempos de execução inviáveis quando são resolvidos pela aplicação de algoritmos exatos, isto é, aqueles algoritmos pertencentes à área de otimização. Muitas vezes, nestes casos, as meta-heurísticas são os procedimentos de solução mais indicados, por serem capazes de melhorar a solução quando atingem mínimos locais e também de obterem soluções em tempo de execução compatível com as aplicações práticas. No entanto, as meta-heurísticas como, por exemplo, os algoritmos evolutivos, requerem a obtenção de uma população inicial, isto é, um conjunto de soluções candidatas para iniciar o processo de resolução. Este trabalho está inserido no contexto das técnicas que usam análise de sensibilidade, nas quais não se procura, em contraposição aos métodos de otimização, alcançar soluções ótimas e, sim, soluções de boa qualidade. Exemplares dessa categoria de métodos são os trabalhos das referências [8,9,10]. Apesar de existirem trabalhos semelhantes publicados, a contribuição deste artigo consiste essencialmente em apresentar de maneira formal a demonstração das expressões chaves do método TIE, o qual não tem sido encontrada nas publicações pesquisadas. Neste artigo é abordado em detalhes o desenvolvimento da teoria da sensibilidade de redes de energia elétrica quanto à tensão elétrica nodal através da perturbação da matriz admitância nodal a uma frequência harmônica especificada, cuja ordem é designada pela letra  $h$  ( $h = f/f_1$ ). A perturbação que afeta a estrutura intrínseca do circuito elétrico corresponde na

Este trabalho contou com apoio do Programa de Pesquisa e Desenvolvimento do Setor Elétrico Brasileiro, Lei Federal 9.991/2.000, com recursos da Companhia Energética de Goiás.

A.C. Baleeiro Alves e Euler B. dos Santos são docentes da EEE/UFMG (e-mail: baleeiro@eee.ufg.br; ebs@eee.ufg.br). Baleeiro é também docente da Universidade Católica de Goiás (UCG/CMP).

Walkíria Nascente Valle concluiu o mestrado em Engenharia Elétrica no Programa *Stricto Sensu* da Escola de Engenharia Elétrica e de Computação da UFG (e-mail: walkiriavalle@gmail.com).

Patrícia L. Cavalcante cursa Engenharia de Computação na Universidade Católica de Goiás (Departamento de Computação) e é bolsista de Iniciação Científica (e-mail: pattizinha@gmail.com).

prática à inserção de elementos passivos em pontos da rede elétrica, tais como filtros sintonizados e capacitores em derivação, que afetariam posições da diagonal da matriz de admitância nodal. Ao contrário de outras metodologias que requerem o conhecimento da admitância do elemento *shunt* para proceder a análise do ponto mais indicado para sua instalação, o método aqui estudado necessita apenas da frequência harmônica sob análise e dos dados da rede para simulação harmônica. O artigo está estruturado como segue. Em primeiro lugar são estabelecidos os problemas que serão tratados. Em seguida, mostra-se passo a passo o desenvolvimento matemático que culminará na obtenção da matriz de sensibilidade e de sua relação com a variação dos autovalores em relação aos elementos da matriz admitância nodal (isto é,  $\frac{\partial \lambda_k}{\partial Y_{ij}}$ ). De posse dos modelos matemáticos, é apresentado o algoritmo que permite elaborar a lista dos nós mais sensíveis da rede elétrica em relação à instalação do filtro harmônico passivo para a frequência harmônica especificada e, no caso do capacitor, em relação à detecção dos nós mais sensíveis quanto à ressonância. Ao final, são apresentados testes e resultados da aplicação do algoritmo a redes elétricas.

## II. DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS

O projeto do filtro harmônico compreende várias fases: o cálculo dos valores dos seus componentes,  $L$  e  $C$ , as tensões e as correntes máximas admissíveis e a análise de desempenho. O desempenho é considerado satisfatório quando, sob as mais severas condições operacionais das fontes harmônicas e da rede elétrica, o filtro atende ao critério especificado de distorção harmônica. Porém, por ser um equipamento passivo, o desempenho do filtro depende fundamentalmente do compromisso entre sua admitância e a admitância de Thevenin do sistema CA à frequência para o qual foi projetado. Entretanto, conhecer a admitância do filtro implica em ter os valores de seus componentes e para saber qual a admitância de Thevenin do sistema CA é preciso saber qual é o ponto de instalação do filtro. Por outro lado, a alocação de capacitores *shunts* é um problema em que a ressonância paralela deve ser evitada se harmônicos estão presentes na rede elétrica. Na maioria dos estudos de análise de desempenho de filtros e de ressonância paralela de capacitores trabalha-se com equivalentes de fontes harmônicas, a admitância equivalente do sistema CA e a admitância do equipamento *shunt*.

Alocar filtros e alocar capacitores na presença de harmônicos podem parecer à primeira vista situações antagônicas quanto à sensibilidade: enquanto a distorção harmônica total de tensão deve ser minimizada por meio da escolha do ponto de instalação do filtro (o que implica em reduzir a magnitude da tensão harmônica); o ponto ideal de alocação do capacitor é aquele que leva à menor amplitude de tensão, ou seja, deve-se evitar a ressonância. Porém, os efeitos físicos desses equipamentos na rede são diferentes se os mesmos forem considerados do ponto de vista das magnitudes das tensões harmônicas: ao se colocar filtro reduz-se a tensão harmônica e ao se colocar capacitor há uma tendência de aumentar a tensão harmônica.

A Teoria Inerente à Estrutura propicia um método que orienta o projetista quanto ao ponto mais indicado para

alocação ao determinar os nós do sistema elétrico mais sensíveis quanto à resposta em magnitude de tensão harmônica. Da análise dos pontos mais sensíveis, seleciona-se o ponto onde será instalado o filtro ou o capacitor; definida a localização, a continuação da análise incluirá naturalmente o estudo do desempenho através de representações por meio de equivalentes [1,9]. Portanto, o que é apresentado neste artigo é um método para determinar uma lista de pontos sensíveis da rede à instalação de equipamentos *shunts* passivos a uma dada frequência especificada, que deve ser aplicado *a priori* em relação às análises de desempenho e de capacidade (suportabilidade). Ressalta-se, entretanto, que, no caso do filtro, o critério utilizado é maximizar o benefício de sua instalação buscando-se determinar o ponto de localização que conduza à menores distorções harmônicas de tensão percentual nas barras do sistema. Funções objetivos como minimização de investimento ou perdas elétricas não são tratadas neste trabalho, mas podem ser incluídas *a posteriori*. Para o capacitor, o objetivo é evitar localizações no grafo da rede que levem à ressonância.

## III. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A informação da sensibilidade da rede em relação à resposta em tensão pode ser expressa a partir da decomposição espectral da matriz de admitância nodal, que é formada para uma frequência harmônica de interesse. Para a finalidade de clareza de exposição, supõe-se que o equipamento *shunt*, cuja localização deve ser decidida, é analisado sob o ponto de vista da frequência harmônica de ordem  $h$  e que a rede elétrica possui  $N$  nós. Na análise nodal, para a frequência harmônica  $h$ , o modelo matemático do sistema consiste na expressão  $Y\hat{E} = \hat{I}$ ; o vetor de correntes, denotado por  $\hat{I}$ , possui  $N$  componentes,  $\hat{I} = [\hat{I}_1(h) \ \hat{I}_2(h) \ \dots \ \hat{I}_N(h)]^T$ , de modo que  $\hat{I}_i(h)$  é a  $i$ -ésima componente, ou seja, é a corrente harmônica de ordem  $h$  injetada no nó  $i$ . A matriz admitância nodal é uma matriz complexa, e é simétrica na ausência de transformadores com relações complexas. Supondo-se que as fontes harmônicas possam ser modeladas como fontes de correntes harmônicas independentes da tensão [12,13], o efeito da injeção de correntes para o harmônico  $h$  é medido pelo vetor de tensões nodais à mesma frequência. Para fins de notação, a ordem inteira da frequência harmônica será omitida das expressões mostradas deste ponto em diante.

### A. Resposta de um sistema e autovalores

Para compreender o enfoque dado à análise de sensibilidade neste trabalho é preciso distinguir a análise da resposta de circuitos no domínio do tempo da análise estacionária. No primeiro caso, o modelo do sistema é na forma de equações de estado,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , tal como fez M.A. Laughton na referência [4]. Os autovalores da matriz de sistema trazem a informação da parcela transitória da resposta, sendo que  $A$  contém os dados inerentes do circuito (parâmetros de circuito). Obviamente perturbações em elementos de  $A$  afetam o espectro de autovalores da matriz (pólos) e interferem na resposta dinâmica da rede. No segundo caso, que se refere ao enfoque deste artigo e das referências [5,6,7,14], os autovalores devem ser interpretados do ponto de vista da álgebra matricial quando

se deseja analisar soluções de sistemas algébricos ( $Y\hat{E} = \hat{I}$ ). Os autovalores propiciam métricas úteis que se prestam à análise de condicionamento numérico da matriz e do efeito de perturbações na estrutura matricial sobre a solução do sistema algébrico. Essa teoria pode ser encontrada nas referências [15,16], dentre outras.

### B. Decomposição espectral

Supondo-se que  $Y$  tenha  $N$  autovalores distintos, é possível representá-la na forma diagonalizada [15,16]:

$$Y = P\Lambda P^{-1}, \quad (1)$$

onde  $P$  é a matriz de transição constituída dos  $P_i$ 's autovetores independentes (isto é, as colunas da matriz  $P$ ), com  $i=1,2,\dots,N$ , sendo  $P_i = (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{Ni})^T$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ , de modo que os  $\lambda_i$ 's são os autovalores, em geral, números complexos. A diagonalização expressa em (1) permite escrever a matriz admitância nodal para a frequência harmônica  $h$  na forma do somatório:

$$Y = \sum_{i=1}^N P_i \lambda_i Q_i^T. \quad (2)$$

Na expressão (2),  $Q_i$  é o autovetor recíproco de  $P_i$ , tais que as matrizes correspondentes,  $Q$  e  $P$ , se relacionam como  $Q^T = P^{-1}$ . Cabe aqui uma explicação sobre o que é autovetor recíproco: enquanto  $P_i$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_i$ , segundo a relação  $YP_i = \lambda_i P_i$ , o autovetor recíproco  $Q_i$  é tal que  $Q_i^T Y = \lambda_i Q_i^T$ , de modo que os autovetores recíprocos são calculados a partir de  $P_i$ , com  $i=1,2,\dots,N$ , observando-se as propriedades indicadas pelas igualdades (3) e (4) [5]:

$$Q_m^T P_i = P_i^T Q_m = 1, \text{ se } i = m, \quad (3)$$

$$Q_m^T P_i = P_i^T Q_m = 0, \text{ se } i \neq m. \quad (4)$$

Para matriz simétrica e real se forem obtidos autovetores ortonormais, não haverá distinção. Porém, para matriz simétrica e complexa, os autovetores  $P_i$  e  $Q_i$  são diferentes e têm componentes complexas e a razão é apontada a seguir. A matriz  $Y$  é complexa e simétrica, e não oferece as mesmas facilidades de uma matriz real e simétrica em relação à diagonalização. A matriz admitância nodal não é hermitiana, não é normal e, a matriz de transição,  $P$ , não é, em geral, unitária. Para um vetor do corpo complexo,  $U$ , a sua norma euclidiana é definida por  $\sqrt{\overline{U}^T U}$  (a barra sobre o símbolo indica o conjugado do vetor). Portanto, o cálculo da norma de vetores complexos requer a obtenção do conjugado, diferentemente do que se define para vetores reais [15,16]. Contudo, ainda se pode supor que os autovetores  $P_i$ 's de  $Y$ , assim como também os recíprocos  $Q_i$ 's, têm norma unitária, isto é,  $\overline{P_i}^T P_i = 1$  e  $\overline{Q_i}^T Q_i = 1$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Diante disso, é razoável supor a decomposição expressa na igualdade (1) e, não, a decomposição  $Y = P\Lambda P^T$ . No entanto, se a matriz for real e simétrica, a decomposição  $P\Lambda P^T$  poderá ser admitida se os autovalores forem distintos, como faz a referência [14].

A inversa da matriz admitância nodal é a matriz impedância nodal, ou seja,  $Z = Y^{-1} = P\Lambda^{-1}P^{-1}$ . A decomposição (1) e a somatória mostrada em (2) imediatamente levam à seguinte representação da matriz impedância nodal.

$$Z = \sum_{i=1}^N P_i \frac{1}{\lambda_i} Q_i^T. \quad (5)$$

### C. Sensibilidade da tensão a perturbações na matriz

Mantendo-se o vetor  $\hat{I}$  constante e perturbando-se a matriz  $Y$  tem-se a resposta na tensão elétrica nodal para a frequência considerada. Por conveniência, esta análise inicia exprimindo o vetor tensão nodal pela relação  $\hat{E} = Y^{-1}\hat{I}$ , a qual com o auxílio da decomposição espectral da matriz  $Y$  permite escrever a expressão:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} P_i Q_i^T \hat{I} = \left( \frac{1}{\lambda_1} P_1 Q_1^T + \frac{1}{\lambda_2} P_2 Q_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_N} P_N Q_N^T \right) \hat{I} \\ &= \left( \frac{1}{\lambda_1} S_1^T + \frac{1}{\lambda_2} S_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_N} S_N^T \right) \hat{I}, \quad \hat{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} S_i^T \hat{I}. \end{aligned}$$

As matrizes  $S_i$ 's, com  $i=1,2,\dots,N$ , são matrizes de sensibilidade. A partir dessas expressões define-se o fator de acoplamento escalar,  $\beta_i$ , como o número complexo que resulta da operação entre vetores,  $\frac{1}{\lambda_i} Q_i^T \hat{I}$ , de acordo com [7], incorporando-se, assim, o efeito das fontes harmônicas. A matriz de sensibilidade, que corresponde especificamente ao índice  $\tau$  do fator escalar de maior módulo,  $S_\tau$ , é então calculada pela expressão  $Q_\tau P_\tau^T$  [7]. Os elementos da diagonal dessa matriz trazem informações valiosas sobre o ponto de localização de elementos *shunts* no sistema elétrico. Este é precisamente o caso da determinação do nó de localização de um ou mais equipamentos passivos *shunts* no sistema de distribuição. Este fato é tratado a seguir.

## IV. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A Teoria Inerente à Estrutura (TIE) foi concebida por M. A. Laughton em 1964, como proposta para análise de sistemas dinâmicos modelados através de equações de estado e, desde então, tem sido aplicada na abordagem de diversos problemas da engenharia, dentre os quais se pode citar: estabilidade de sistemas de potência e localização de capacitores. No caso específico das aplicações em foco neste artigo, a informação sobre a rede elétrica está contida na matriz admitância nodal, que é formada para a frequência de interesse. A TIE fundamenta-se na sensibilidade entre autovalores e elementos da matriz admitância nodal. A relação matemática chave é representada a seguir [5,6,7]:

$$S_k = Q_k P_k^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_k}{\partial y_{11}} & \dots & \frac{\partial \lambda_k}{\partial y_{1N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial \lambda_k}{\partial y_{NN}} \end{bmatrix}.$$

A demonstração formal desta relação é feita detalhadamente no Apêndice A e é certamente a principal contribuição deste artigo. Uma vez estabelecidos os aspectos essenciais da TIE necessários à aplicação proposta passa-se à próxima seção, que definirá os passos do algoritmo, baseado em [7].



Da análise da Tabela I conclui-se que a lista das barras mais sensíveis para instalação do filtro é:

$$\psi = [15;16;13;14;11].$$

Para validação do algoritmo utilizou-se o programa PQF 7 [17] para simular a rede da Fig. 2 e verificar a coerência dos resultados da TIE. A Tabela II mostra as distorções calculadas, supondo-se um filtro de 800 kVAr.

TABELA II:  $DHT_V$  PARA AS BARRAS MAIS SENSÍVEIS (PQF 7).

| Barras         | s/filtro | Posição do filtro |       |       |       |       |  |
|----------------|----------|-------------------|-------|-------|-------|-------|--|
|                |          | 11                | 13    | 14    | 15    | 16    |  |
| 1              | 5,41     | 2,41              | 2,76  | 2,96  | 3,01  | 3,12  |  |
| 2              | 5,95     | 2,78              | 3,37  | 3,41  | 3,45  | 3,57  |  |
| 3              | 6,54     | 3,26              | 3,51  | 3,61  | 3,73  | 3,87  |  |
| 4              | 6,80     | 3,52              | 3,78  | 3,80  | 3,91  | 4,01  |  |
| 5              | 7,78     | 4,31              | 4,56  | 4,65  | 4,75  | 4,83  |  |
| 6              | 7,78     | 4,31              | 4,56  | 4,65  | 4,76  | 4,83  |  |
| 7              | 7,79     | 4,31              | 4,56  | 4,65  | 4,76  | 4,83  |  |
| 8              | 7,80     | 4,31              | 4,57  | 4,66  | 4,77  | 4,83  |  |
| 9              | 5,96     | 2,78              | 3,37  | 3,41  | 3,45  | 3,57  |  |
| 10             | 7,53     | 3,59              | 3,63  | 3,96  | 4,01  | 4,17  |  |
| 11             | 9,04     | 4,57              | 4,45  | 4,70  | 4,53  | 4,74  |  |
| 12             | 9,05     | 4,57              | 4,46  | 4,71  | 4,54  | 4,74  |  |
| 13             | 10,26    | 6,43              | 4,66  | 4,77  | 4,49  | 4,73  |  |
| 14             | 10,22    | 6,77              | 4,88  | 4,07  | 4,98  | 5,00  |  |
| 15             | 11,96    | 8,63              | 6,95  | 7,12  | 4,98  | 4,99  |  |
| 16             | 11,96    | 8,63              | 6,95  | 7,12  | 4,98  | 4,83  |  |
| 17             | 0,26     | 0,12              | 0,13  | 0,14  | 0,15  | 0,16  |  |
| $\Sigma DHT_V$ | 132,09   | 75,30             | 71,15 | 72,39 | 69,25 | 70,82 |  |

Desta tabela, verifica-se que ao somar as distorções totais a seqüência obtida é a seguinte: 15, 16, 13, 14, 11, que coincide com a lista  $\psi$ . As outras posições foram omitidas por exibirem distorções muito elevadas.

Caso B: sistema hipotético com 7 barras de 13,8 kV e 0,38 kV. A potência base é 1 MVA. A Fig. 2 ilustra o diagrama.

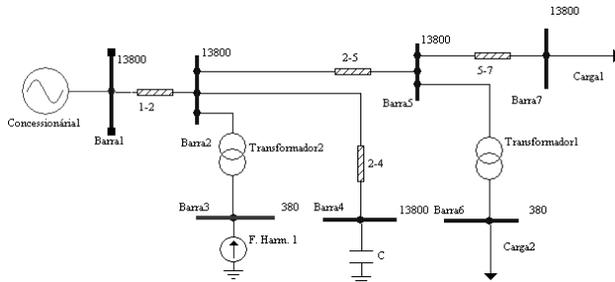


Fig. 2: Sistema-teste para análise de sensibilidade à ressonância.

Os valores em módulo obtidos para  $\beta_i$  que resultaram do teste são os seguintes:

$$\begin{array}{lll} 0,00000034146903; & 0,00000001437415; & 0,00003646802825; \\ 0,00059635458006; & 0,23134365838710; & 0,00867327210626 \\ 0,04232100596082. & & \end{array}$$

Verifica-se que o maior módulo é 0,23134365838710, que corresponde ao índice  $\tau = 5$ . Da matriz de sensibilidade  $S_5$ , obtém-se os módulos dos elementos da sua diagonal, dos quais extrai-se o de maior módulo:  $|S_{5,44}| = 0,15140484129635$ . Portanto, a lista de barras sensíveis, da ressonância mais crítica para a menos crítica é:

$$\psi = [4;2;1;3;5;7;6].$$

Da simulação com o PQF 7, supondo-se agora um banco de capacitores de 300 kVAr, o qual tem sua posição variada barra por barra, obtém-se as distorções totais de tensão, conforme mostradas na Fig. 3. A abscissa indica a barra de localização do capacitor.

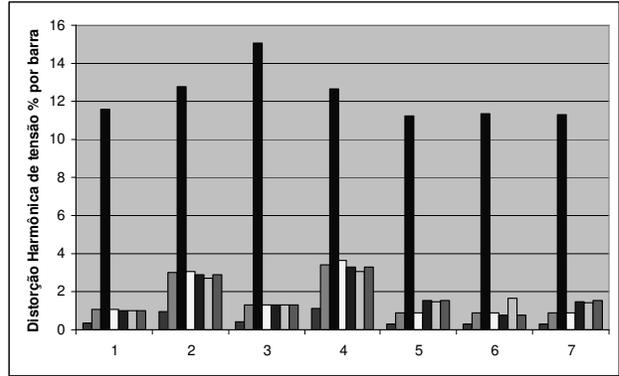


Fig. 3: Histogramas de  $DHT_V$  em função da posição do capacitor.

Da comparação dos resultados da TIE para este caso e dos resultados da simulação, observa-se a divergência de posição da barra 1 nas listas. Há que se ressaltar, no entanto, que as indicações das  $DHT_V$  do PQF 7 e as indicações extraídas das sensibilidades da TIE para as posições das listas a partir do terceiro lugar são decididas por diferenças a nível de casas decimais, podendo ser atribuídas a imprecisões numéricas.

## VII. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta uma ferramenta matemática útil no planejamento da localização de filtros e capacitores para sistemas de distribuição de energia elétrica. A técnica baseia-se na análise de sensibilidade da tensão harmônica e nos cálculos de autovalores e autovetores da matriz admitância harmônica. O principal atrativo da TIE é que a admitância do equipamento *shunt* não precisa ser conhecida *a priori*. A informação dada ao usuário consiste de uma lista de nós mais sensíveis quanto a indicadores de qualidade da energia elétrica (distorções harmônicas totais). Nos estudos de casos demonstrou-se a aplicabilidade da TIE na alocação de filtro sintonizado e de banco de capacitor para  $h = 5$ . A eficácia do algoritmo foi comprovada através de simulações computacionais com um programa de penetração harmônica, o PQF 7. Uma das mais relevantes contribuições deste trabalho é a demonstração formal da expressão da matriz de sensibilidade e de sua relação com a perturbação da estrutura inerente à rede. Esta técnica exibe um excelente potencial para auxiliar o projetista quando métodos combinatórios são utilizados na solução de problemas de planejamento de sistemas elétricos.

## VIII. APÊNDICES

### A. Demonstração formal da TIE

Para uma perturbação no elemento da posição diagonal  $(k, k)$  da matriz admitância nodal para a frequência de ordem  $h$ ,  $Y$ , a  $\tau$ -ésima matriz de sensibilidade,  $S_\tau = Q_\tau P_\tau^T$  tem o elemento da diagonal  $S_{\tau,kk}$  igual à derivada  $\frac{\partial \lambda_\tau}{\partial Y_{kk}}$ . Demonstra-se a seguir esta relação.

A decomposição espectral da matriz  $Y$  permite escrever o sistema (A.1) a seguir em função do autovetor recíproco.

$$Q_\tau^T (Y - \lambda_\tau I) = 0, \text{ onde } I \text{ é a matriz identidade.} \quad (\text{A.1})$$

Uma pequena perturbação  $\Delta Y$  na matriz  $Y$  reflete em

mudanças de  $\lambda_\tau$  e de  $Q_\tau^T$ :

$$(Q_\tau^T + \Delta Q_\tau^T)(Y + \Delta Y) = (\lambda_\tau + \Delta \lambda_\tau)(Q_\tau^T + \Delta Q_\tau^T).$$

Desenvolvendo a equação precedente e desprezando os termos de segunda ordem, obtém-se:

$$Q_\tau^T \Delta Y + \Delta Q_\tau^T (Y - \lambda_\tau I) \cong \Delta \lambda_\tau Q_\tau^T. \quad (A.2)$$

Pós-multiplicando a expressão (A.2) pelo autovetor  $P_\tau$ , obtém-se a expressão (A.3).

$$Q_\tau^T \Delta Y P_\tau \cong \Delta \lambda_\tau Q_\tau^T P_\tau. \quad (A.3)$$

O produto  $Q_\tau^T P_\tau$  é igual a 1, portanto, tem-se a variação do  $\tau$ -ésimo autovalor explicitada em termos da variação sofrida pela matriz  $Y$ , conforme indicada em (A.4).

$$\Delta \lambda_\tau \cong Q_\tau^T \Delta Y P_\tau. \quad (A.4)$$

A matriz de variação da admitância nodal para a perturbação numa específica posição  $(k, k)$  é uma matriz quadrada  $N \times N$  com elementos nulos exceto o elemento  $\Delta Y_{kk}$  (por exemplo, poderia ser a admitância *shunt* do filtro ou do capacitor, conforme mencionadas na seção 2). Esta matriz é representada usando o *singleton*  $e_k^T = [0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]$ :

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \Delta Y_{kk} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = e_k \Delta Y_{kk} e_k^T$$

Da equação (A.4) e da representação da matriz  $\Delta Y$ , no limite, isto é, para perturbações infinitesimais de admitância, resulta a expressão para  $\frac{\partial \lambda_\tau}{\partial Y_{kk}}$  como mostrada em (A.5).

$$\frac{\partial \lambda_\tau}{\partial Y_{kk}} = q_{k\tau} P_{k\tau}. \quad (A.5)$$

Para concluir a demonstração, basta considerar a definição da matriz de sensibilidade,  $S_\tau = Q_\tau P_\tau^T$ , e verificar que o elemento  $(k, k)$  desta matriz é o produto  $q_{k\tau} P_{k\tau}$ .

#### B. Dados adicionais dos sistemas testados

Para o Caso A, as correntes das fontes harmônicas são 15,011107; 10,115177; 5,311622; 3,925982; 2,078461; 1,431829; 0,600444; 0,415692; respectivamente, para 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25, em ampères referidas a 12,5kV. A potência de curto-circuito da concessionária é 800 MVA.

TABELA B.I: DADOS DE LINHA (CASO A).

| Barras | R%     | X%     | $b_{lm}\%$ | Barras | R%     | X%     | $b_{lm}\%$ |
|--------|--------|--------|------------|--------|--------|--------|------------|
| 1-2    | 0,4310 | 1,2040 | 0,0035     | 10-11  | 2,2220 | 2,8770 | 0,0056     |
| 2-3    | 0,6010 | 1,6770 | 0,0049     | 11-12  | 4,8030 | 6,2180 | 0,0122     |
| 3-4    | 0,3160 | 0,8820 | 0,0026     | 11-13  | 3,9850 | 5,1600 | 0,0101     |
| 4-5    | 0,8960 | 2,5020 | 0,0073     | 13-14  | 2,9100 | 3,7680 | 0,0074     |
| 5-6    | 0,2950 | 0,8240 | 0,0024     | 13-15  | 3,7270 | 4,5930 | 0,0100     |
| 6-7    | 1,7200 | 2,1200 | 0,0046     | 15-16  | 2,2080 | 2,7200 | 0,0059     |
| 7-8    | 4,0700 | 3,0530 | 0,0051     | 15-16  | 2,2080 | 2,7200 | 0,0059     |
| 2-9    | 1,7060 | 2,2090 | 0,0043     | 17-1   | 0,0310 | 6,7530 | 0,0000     |
| 1-10   | 2,9100 | 3,7680 | 0,0074     | 17-0   | 0,0500 | 0,3540 | 0,0000     |

Para o Caso B, as susceptâncias são nulas, o transformador 1 é de 300 kVA,  $2 + j10$  %, e o transformador 2 é de 500 kVA,  $3,33 + j16,67$  % na base dos mesmos. A fonte de

corrente harmônica da barra 3 gera, em ampères, 91,16; 65,11; 41,44; 35,06, respectivamente, para as ordens 5; 7; 11; 13, em 380 V. O capacitor localizado na barra 4 é de 60 kVar. A potência de curto-circuito da concessionária é 200 MVA. Os dados das linhas estão mostrados na Tabela B.II.

TABELA B.II: DADOS DE LINHA (CASO B).

| Barras | R%      | X%      | Barras | R%      | X%      |
|--------|---------|---------|--------|---------|---------|
| 1-2    | 0,52510 | 1,05020 | 2-5    | 1,05020 | 2,62550 |
| 2-4    | 0,05251 | 0,10502 | 5-7    | 0,05210 | 0,26255 |

#### IX. REFERÊNCIAS

- [1] DAS, J.C. Passive filters – potentialities and limitations. *IEEE Trans. on Industry Applications*, v. 40, n. 1, p. 232-241, January-February 2004.
- [2] MACEDO JR., José R., RESENDE, J.W. Alocação ótima de filtros e capacitores no contexto da qualidade da energia elétrica. XVI SNPTEE, Campinas, 1-8, Outubro, 2001.
- [3] DUGAN, Roger C., MCGRANAGHAN M. F. and BEATY H.W. *Electric Power Systems Quality*. NY: McGraw-Hill, 1996. 265 p.
- [4] LAUGHTON, M.A. Sensitivity in dynamical system analysis. *Journal Electron. Control*, 1964, 17, pp. 577-591.
- [5] LAUGHTON, M.A. and EI-ISKANDARANI, M.A. The structure of power network voltage profiles. *Proceedings of 8th PSCC*, Darmstadt, 845-851, August 1982.
- [6] LAUGHTON, M.A. On the inherent network structure. *Proceedings of 6th PSCC*, Darmstadt, 188-196, August 1978.
- [7] CARPINELLI, G. *et alii*. Inherent structure theory of networks and power system harmonics. *IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, v. 145, n. 2, p. 123-132, 1998.
- [8] PAMPLONA, F.M. and BENEMAR, A.S. Harmonic passive filter planning in radial distribution systems using genetic algorithms. *2004 IEEE/PES Transmission & Distribution Conference and Exposition: Latin America*, p. 6, November 2004.
- [9] CHANG, G.W, CHU, Shou-Yung and WANG, Hung-Lu. Sensitivity-based approach for passive harmonic filter planning in a power system. *2002 IEEE PES Winter Meeting*, New York, p. 937-940, Jan. 2002.
- [10] JORTMEYER, T.H. and HIYAMA, T. Distribution system harmonic filter planning. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v.11, n. 4, p.2005-2012, Oct. 1996.
- [11] VALLE, W. N. Procedimento de localização de filtros harmônicos em sistemas de distribuição de energia elétrica. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil, 2006, p. 114.
- [12] POMÍLIO, J.A., DECKMANN, S.M., MERTENS E.A., DIAS L.F.S., AOKI, A.R., TEIXEIRA M.D. e GARCIA, F.R. Caracterização e modelagem de cargas típicas de redes secundárias com consumidores domésticos e comerciais. VI Seminário Brasileiro sobre Qualidade da Energia Elétrica (VI SBQEE), Belém - Brasil, 1-8, Agosto 2005.
- [13] IEEE – Task Force on Harmonics Modeling and Simulation. Modeling and simulation of the propagation of harmonics in electric power networks. Part I: Concepts, models and simulation techniques. Part II: Sample systems and examples. *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 11, n. 1, p. 452-474, Jan. 1996.
- [14] BACHRY, A. Power quality studies in distributions systems involving spectral decomposition. *Doctoral Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg*. 2004.
- [15] WATKINS, D. S. Fundamentals of Matrix Computations, John Wiley & Sons. 1991.
- [16] WILKINSON, J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford, 1965.
- [17] Programa PQF 7. Licença adquirida da Qualities. 2006.

#### X. BIOGRAFIAS

**Antônio César Baleeiro Alves** é natural de Teófilo Otoni-MG, Brasil. É Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP (1997), e é Mestre pela UFU (1991) e graduou-se em Engenharia Elétrica pela UFG em 1983. Sua área de interesse é sistemas de energia elétrica.

**Walkíria Nascente Valle** é natural de Goiânia-GO, Brasil. É Mestre pela EEEC/UFG (2006) e graduou-se em Engenharia Elétrica em 1995. Leciona na Universidade Estadual de Goiás e participa de pesquisas na UFG. Sua área de interesse é sistemas de energia elétrica.

**Patrícia Lopes Cavalcante** é natural de Brasília-DF, Brasil. É graduanda em Engenharia de Computação na UCG/CMP e é bolsista de IC.

**Euler Bueno dos Santos** é natural de Goiânia-GO, Brasil. Doutor em Engenharia Elétrica (2000), e Mestre (1993), ambos pela UFU. Graduou-se em Engenharia Elétrica e em Física pela UFG. Suas áreas de interesse são QEE e máquinas elétricas especiais.