

# Desenvolvimento de Metodologias para a Avaliação da Integridade Mecânica de Hidrogeradores - Análise do Comportamento Dinâmico de Hidrogeradores

Alessandro Borges de Sousa Oliveira UnB, Eduardo Alberi Rossi UnB

**Resumo.** As forças de campo eletromagnéticas presentes em hidrogeradores são de grande magnitude e podem, quando desbalanceadas, ser uma das maiores fontes de esforços espúrios. Tal desbalanceamento pode ser produzido devido a problemas de montagem, defeitos de fabricação, desgaste de componentes, etc. A torção do eixo devido à sua rotação é uma das principais forças atuantes. Assim, uma análise detalhada das forças torsionais torna-se necessária. Na maior parte da literatura disponível, os elementos finitos de viga não possuem a torção implementada, apenas deflexão, flexão e rotação. Este artigo consiste em implementar a torção em um elemento de viga no SciLab, que é um programa de simulação matemática com código livre. Com isto, é possível estudar os esforços torcionais em eixos de hidrogeradores, com o intuito de avaliar a sua integridade física.

**Palavras-chave:** SciLab, Elementos Finitos, Viga, Torção

## I. INTRODUÇÃO

A fim de realizar a análise em um eixo de hidrogerador, uma matriz de rigidez com oito graus de liberdade para cada elemento foi desenvolvida e implementada no SciLab [2], que é um programa de simulação matemática com código livre, sendo possível verificar a deflexão, flexão, rotação e torção. A vantagem do SciLab é seu uso fácil e pós-processamento rápido se comparado a outros softwares de elementos finitos existentes no mercado.

Assim, uma adaptação de um elemento de viga básico foi realizada, e após isso foi possível verificar com precisão a deformação axial, flexão, rotação e torção de um modelo de viga. Primeiro criou-se um modelo inicial de viga e conseqüentemente o estudo de sua teoria básica. Depois, a análise da teoria da torção [6] e sua adaptação foram realizadas para a inserção no elemento de viga.

Este projeto de pesquisa - que representa a extensão dos esforços no sentido de prover ferramentas essenciais de projeto e de avaliação de turbinas e geradores ao corpo técnico da Eletronorte, visa desenvolver metodologias e ferramentas de análise de projeto mecânico que permitam a empresa geradora identificar e avaliar possíveis efeitos de esforços espúrios que possam levar ao mau funcionamento dos rotores e, conseqüentemente, do sistema como um todo.

## II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O método dos elementos finitos [5] baseia-se na sobreposição dos resultados obtidos em cada nó do sistema, obtendo uma matriz de rigidez global, que simula o resultado final do problema, a partir do sistema de equações:

$$[K^e]\{u\} = \{P\} \quad (1)$$

Onde:

$[K^e]$  - matriz de rigidez global;

$\{u\}$  - vetor deslocamento;

$\{P\}$  - vetor força.

Vemos que  $[K^e]$  é a soma dos resultados obtidos para cada nó do sistema de elementos finitos. Esta superposição é realizada da seguinte maneira, de acordo com a figura 1 e a equação de  $[K^e]$ , abaixo:

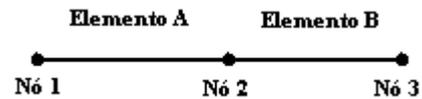


Figura.1: Elemento de viga simples

A equação abaixo demonstra uma matriz de rigidez global de forma bem simples:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & 0 \\ k_{21}^a & k_{22}^a + k_{11}^b & k_{12}^b \\ 0 & k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix} \quad (2)$$

Na equação (2),  $K^a$  relaciona os índices do nó A e,  $K^b$  do nó B, para um elemento de viga simples com apenas dois graus de liberdade quaisquer. Assim, o termo  $k_{22}^a + k_{11}^b$  relaciona o resultado do nó 2 do elemento A com o nó 1 do elemento B. O resultado final é obtido no nó 3. Sistemas com maior número de graus de liberdade seguem o mesmo critério.

### III. METODOLOGIA

Para um modelo de viga, a figura 2 será usada como base para os oito graus de liberdade (considerando o cisalhamento) definidos para um mesmo elemento de viga.

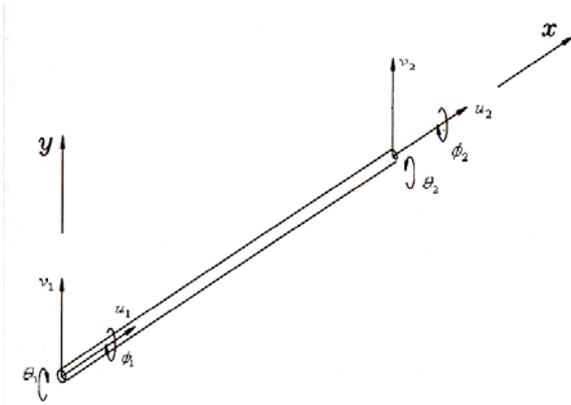


Figura 2: Elemento de viga

Onde:

$u$  = deformação referente à tração, deslocamento horizontal;

$v$  = deflexão referente à força cisalhante, deslocamento vertical;

$\theta$  = rotação referente ao momento fletor;

$\phi$  = torção referente ao momento torçor.

Na literatura, são comumente encontrados elementos de viga com apenas três graus de liberdade por nó, ficando a torção de fora. Assim, para uma análise inicial, consideraremos apenas a tração, deflexão e a rotação, só então será inserida torção, obtendo assim o modelo de viga final.

#### A. Descrição do Modelo Inicial

De acordo com a teoria de deflexão de viga – teoria usada em engenharia – a deformação é caracterizada basicamente pela linha elástica. Uma viga possui três graus de liberdade por nó: rotação em  $y$  e duas translações – deslocamentos vertical e horizontal. Numa primeira análise, o elemento de viga é considerado uma barra reta de seção constante, capaz de suportar apenas cargas transversais e axiais.

O elemento possui dois nós com três graus de liberdade cada um. Assim, a matriz de rigidez do elemento será de ordem  $6 \times 6$ , relacionando os deslocamentos nodais com as seis forças nodais.

Assim, é feita uma associação dos deslocamentos nodais com as seguintes cargas generalizadas:

TABELA I: CARGAS ASSOCIADAS AOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Deslocamentos nodais	$u_1$	$v_1$	$\theta_1$	$\phi_1$	$u_2$	$v_2$	$\theta_2$	$\phi_2$
Cargas associadas	$P_1$	$V_1$	$M_1$	$T_1$	$P_2$	$V_2$	$M_2$	$T_2$

Novamente,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são relacionados à torção, e não entrarão na matriz de rigidez inicial. Mais à frente será demonstrado esta inserção na matriz mais detalhadamente. A figura 3 refere-se a um elemento de viga com seis graus de liberdades e com suas forças nodais aplicadas.

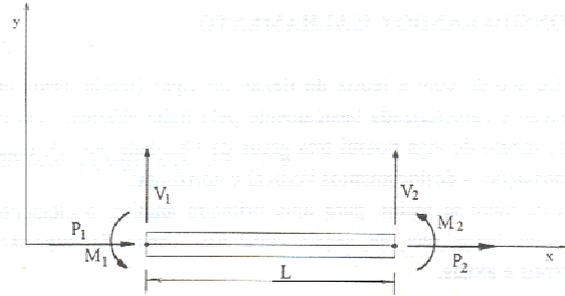


Figura 3: Forças nodais

Assim, do sistema de equações obtido  $[K]\{u\} = \{P\}$ , a matriz de rigidez  $6 \times 6$ , o vetor deslocamento e o vetor força expandem-se para o seguinte:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

onde:

$[K]$  - matriz de rigidez;  
 $\{u\}$  - vetor deslocamento;  
 $\{P\}$  - vetor força.

### IV. CONCEITOS TEÓRICOS

#### A. Cargas Axiais: $P_1$ e $P_2$

O primeiro par de cargas, de acordo com a Tabela I, são as cargas axiais. Para a obtenção dos coeficientes de rigidez relativos às cargas axiais ( $k_{11}, k_{14}, k_{41}$  e  $k_{44}$ ) é necessário tomar em conta as cargas  $P_1$  e  $P_2$ , de um determinado elemento. De acordo com as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} u_1 \frac{AE}{L} - u_2 \frac{AE}{L} &= P_1 \quad \text{e} \\ u_2 \frac{AE}{L} - u_1 \frac{AE}{L} &= P_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Obtendo:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A equação (5) representa o sistema de equações para cargas axiais. Com isso, quatro elementos da matriz de rigidez já foram definidos, conseguindo o seguinte resultado para a matriz de rigidez do modelo inicial:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & k_{12} & k_{13} & -\frac{EA}{L} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & k_{42} & k_{43} & \frac{EA}{L} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (6)$$

### B. Cargas Transversais: $V_1$ e $V_2$

Para obtenção da deflexão da viga, leva-se em conta as cargas transversais  $V_1$  e  $V_2$ . De acordo com a teoria de vigas, a deflexão decorrente das cargas transversais é dada por dois termos:

$$v = v_f + v_c \quad (7)$$

onde:

$v_f$  → termo relativo à flexão;

$v_c$  → termo relativo ao cisalhamento.

Assim, é interessante fazer uma análise individual de cada parte da deflexão.

#### B.1. Termo do Cisalhamento:

A definição de cisalhamento

$$\frac{dv_c}{dx} = -\frac{\alpha V_1}{A_y G} \quad (8)$$

#### B.2. Termo da Flexão:

$$EI \frac{d^2 v_f}{dx^2} = V_1 x - M_1 \quad (9)$$

onde:

$\alpha$  → fator de correção para a tensão cisalhante média;

$A_y$  → área efetiva de cisalhamento;

$G$  → módulo de elasticidade transversal;

$I$  → momento de inércia em relação ao eixo  $z$ ;

$E$  → módulo de elasticidade longitudinal.

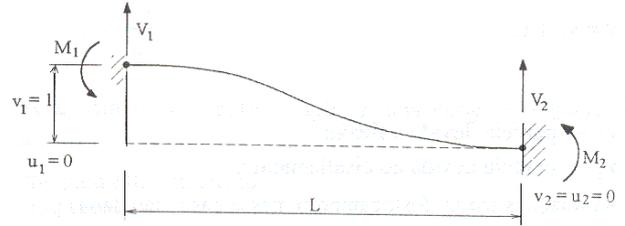


Figura 4.: Viga com carga transversal.

Assim, a partir de correlações matemáticas e da Figura 4, como de suas condições de contorno, obtém-se a equação que representa a linha elástica:

$$v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{V_1 \phi x L^2}{12} + \frac{V_1 L^3}{12} (1 + \phi) \right] \quad (10)$$

$$\text{para } \phi = \frac{12\alpha EI}{A_y GL^2}$$

De posse da equação da linha elástica, é possível determinar cada  $k_{ij}$  correspondentes às forças aplicadas ( $k_{22}, k_{25}, k_{52}$  e  $k_{55}$ ), aplicando as condições de contorno adequadamente. Logo, a matriz de rigidez torna-se:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & k_{12} & k_{13} & -\frac{EA}{L} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & k_{23} & k_{24} & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ -\frac{EA}{L} & k_{42} & k_{43} & \frac{EA}{L} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & k_{53} & k_{54} & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A equação (11) representa a matriz de rigidez com os coeficientes de tração e flexão do elemento de viga.

### C. Momentos Fletores: $M_1$ e $M_2$

Após a análise dos coeficientes de rigidez associados à tração e à flexão, para completar a matriz de

rigidez, faltam os coeficientes relativos às rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$  das extremidades da viga decorrentes das forças de flexão.

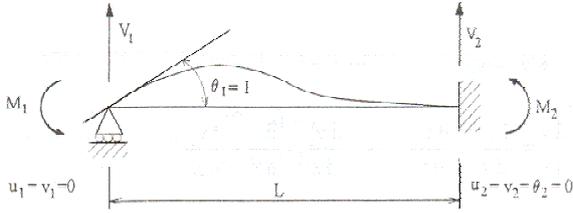


Figura 5: Viga sob flexão.

A equação da linha elástica é semelhante à equação (10), pois as forças atuantes são as mesmas, porém, com condições de contorno diferentes:

$$EIv = \frac{V_1 x^3}{6} - \frac{M_1 x^2}{2} - \frac{\alpha EI V_1}{A_y G} x + C_1 x + C_2 \quad (12)$$

Aplicando as condições de contorno de acordo com a Figura 5, resulta:

$$C_2 = 0 \text{ e } C_1 = M_1 L - \frac{V_1 L^2}{2} \quad (13)$$

Retirando a parcela referente à flexão da equação (7), consegue-se:

$$v = v_f + v_c$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_f}{dx} + \frac{dv_c}{dx} \rightarrow \frac{dv_f}{dx} = \frac{dv}{dx} - \frac{dv_c}{dx} \quad (14)$$

Para o ponto  $x = 0$ , têm-se:

$$\frac{dv_f}{dx}(x=0) = \frac{1}{EI} \left[ M_1 L - \frac{V_1 L^2}{2} \right] \quad (15)$$

Substituindo  $V_1$  na equação (15):

$$\frac{dv_f}{dx}(x=0) = \frac{M_1 L}{EI} \left[ \frac{1+\phi}{4+\phi} \right] \quad (16)$$

$$\text{para } \phi = \frac{12\alpha EI}{A_y GL^2}$$

Da definição de coeficiente de rigidez:

$$\frac{dv_f}{dx}(x=0) = 1 \rightarrow M_1 = k_{33} \therefore k_{33} = \frac{(4+\phi) EI}{(1+\phi) L}$$

Utilizando as expressões de equilíbrio da viga, vem:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow V_2 = -V_1 \\ \sum M(x=L) = 0 &\rightarrow M_2 = -M_1 + V_1 L \end{aligned} \quad (17)$$

Das equações de equilíbrio acima, da definição do coeficiente de rigidez e simetria, chega-se aos valores de  $k_{ij}$  referentes aos momentos fletores:

$$\begin{aligned} k_{53} &= -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)}; & k_{63} &= \frac{(2-\phi) EI}{(1+\phi) L}; \\ k_{66} &= \frac{(4+\phi) EI}{(1+\phi) L}; & k_{55} &= k_{22} = \frac{12EI}{L^2(1+\phi)}; \\ k_{56} &= -k_{23} = -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)}. \end{aligned}$$

Assim, a equação final para um modelo de viga com seis graus de liberdade, considerando cisalhamento e com todos os  $k_{ij}$  definidos é:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Como explicado anteriormente, a equação (18) mostra apenas seis graus de liberdade, faltando a parcela de torção na matriz. Assim, uma análise detalhada da torção é realizada a seguir.

#### D. Torção:

Para um resultado eficiente na análise de esforços no eixo de hidrogeradores, a torção torna-se necessária, tendo em vista que as maiores forças são no sentido de rotação em torno de seu próprio eixo. Com isso, há uma adição de dois graus de liberdade no elemento de viga,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , que significam o ângulo de torção em decorrência das forças aplicadas,  $T_1$  e  $T_2$ .



Figura 6: Viga sob torção

Com a inserção da torção, a matriz de rigidez agora é de 8x8. Como anteriormente, a matriz toma a seguinte forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Os  $k_{ij}$  relacionados à torção são:  $k_{44}, k_{48}, k_{84}$  e  $k_{88}$ . Para isso, uma formulação baseada na teoria de torção torna-se necessária.

### D.1 Teoria Básica de Torção

Da teoria de torção, sabe-se que:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \text{e} \quad \gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (20)$$

onde:  $\gamma$  = deformação de cisalhamento

$\rho$  = raio

$\phi$  = ângulo de giro

$c$  = raio máximo

As equações (20) mostram que a deformação de cisalhamento  $\gamma$  em um certo ponto do eixo sujeito à torção é proporcional ao ângulo de giro  $\phi$ . Ela mostra também que  $\gamma$  é proporcional à distância  $\rho$  do centro do eixo circular ao ponto considerado. Assim, conclui-se que a deformação de cisalhamento em uma barra circular varia linearmente com a distância ao eixo da barra. Eliminando o ângulo de giro  $\phi$  pode-se expressar a deformação de cisalhamento  $\gamma$  a uma distância  $\rho$  do eixo da barra por:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (21)$$

Aplicando a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento, têm-se:

$$\tau = G\gamma \quad (22)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal.

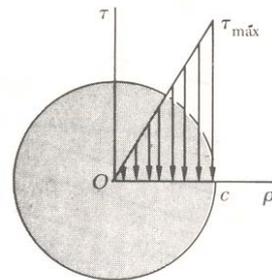
Substituindo a equação (22) em (21):

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (23)$$

Observa-se que a tensão de cisalhamento  $\tau$  varia linearmente com a distância  $\rho$  do eixo da barra. Finalmente, chega-se a uma fórmula de torção em regime elástico:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (24)$$

onde:  $T$  = momento torçor da barra  
 $J$  = momento polar de inércia

Figura 7: Dependência de  $\tau$  com  $\rho$ .

### D.2. Ângulo de Torção em Regime Elástico

Admitindo que qualquer porção do eixo permanece elástica, sabe-se que o ângulo de torção  $\phi$  e a deformação de cisalhamento máxima  $\gamma_{\max}$  estão relacionadas pela expressão:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (25)$$

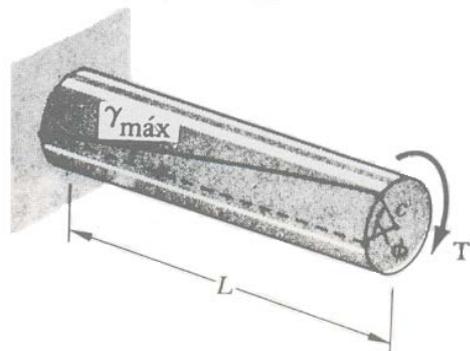


Figura 8.: Cisalhamento máximo.

Novamente, da Lei de Hooke, vem:

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (26)$$

Igualando (25) com (26) e resolvendo para  $\phi$ :

$$\frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{GJ} \Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ} \quad \text{ou} \quad T = \phi \frac{GJ}{L} \quad (27)$$

A relação obtida (27) mostra que, dentro do regime elástico, o ângulo de torção  $\phi$  é proporcional ao momento de torção T aplicado ao eixo circular.

### D.3. Inserindo Torção na Matriz de Rigidez

Para a inserção da torção na matriz, novos coeficientes são obtidos e uma mudança é realizada no modelo da matriz. Os índices  $k_{44}$ ,  $k_{48}$ ,  $k_{84}$  e  $k_{88}$  estão relacionados ao ângulo de rotação  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , de cada elemento. Assim, semelhantemente à equação (5), o sistema de equações para torção é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ \frac{L}{L} & \frac{L}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \\ \frac{L}{L} & \frac{L}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Com todos os coeficientes de rigidez definidos, é possível montar a matriz de rigidez final do sistema, considerando o cisalhamento, para um elemento de viga com dois nós e oito graus de liberdade:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (29)$$

## V. Resultados

### A. Caso geral

Primeiramente, utilizando-se o SciLab, foi realizada uma simulação numérica dos resultados comparando com a solução analítica baseada na teoria de deflexão de vigas. A figura 9 exemplifica a deflexão discretizada em cada seção da viga (eixo das abcissas) que varia de 1 a 6. Os valores dos eixos das ordenadas são

meramente exemplificativos, apenas para efeito de comparação entre os dois métodos.

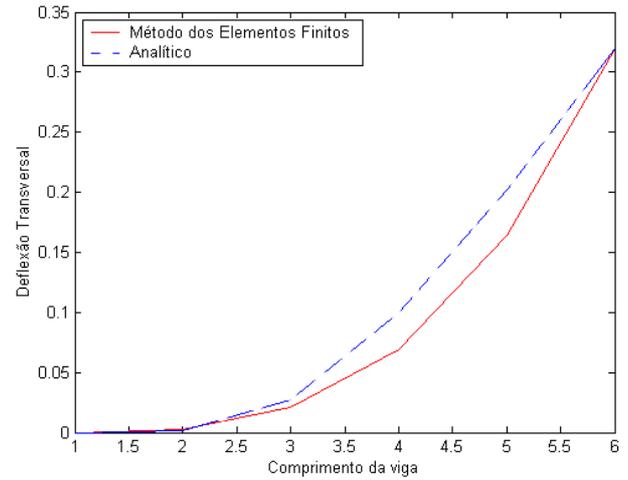


Figura 9: Comparação de resultados

### B. Caso específico

Para a validação dos resultados, será estudado um exemplo específico de deflexão de vigas.

#### Exemplo:

A Figura 10 mostra uma viga simplesmente apoiada de comprimento 20 in, módulo de elasticidade  $E = 10^7$  psi e com seção transversal de 1x1 in. A viga é modelada com 6 elementos finitos de dois graus de liberdade cada ( $v$  e  $\theta$ ). Ela é submetida a um carregamento central de 100 lb. As condições de contorno são: deflexão horizontal no extremo esquerdo igual a zero (i.e.  $v_1 = 0$ ) e ângulo de inclinação no nó de simetria igual a zero (i.e.  $\theta_6 = 0$ ). Da simetria, apenas metade da força de carregamento é aplicada no nó central. Deseja-se obter uma comparação entre a solução pelo método de elementos finitos e a solução exata.

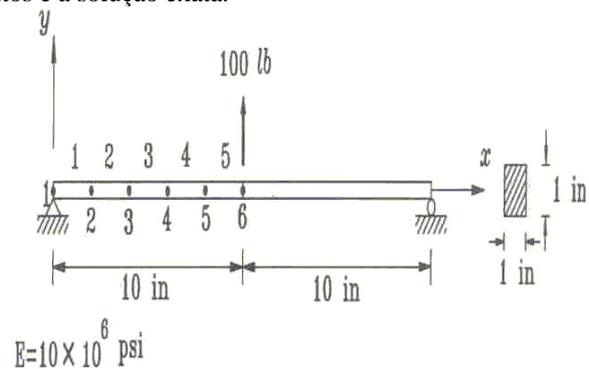


Figura 10: Viga simplesmente apoiada com 6 elementos finitos.

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e pelo método de solução exata, ou trivial, são demonstrados na tabela II, discretizados por cada grau de liberdade.

TABELA II: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DE CADA MÉTODO.

Grau de Liberdade	Método dos Elem. Finitos	Solução Exata	
1.0000	0.0000	0.0000	Deflexão nó 1
2.0000	0.0030	0.0030	Inclinação nó 1
3.0000	0.0059	0.0059	Deflexão nó 2
4.0000	0.0029	0.0029	Inclinação nó 2
5.0000	0.0114	0.0114	Deflexão nó 3
6.0000	0.0025	0.0025	Inclinação nó 3
7.0000	0.0158	0.0158	Deflexão nó 4
8.0000	0.0019	0.0158	Inclinação nó 4
9.0000	0.0189	0.0189	Deflexão nó 5
10.000	0.0011	0.0011	Inclinação nó 5
11.000	0.0200	0.0200	Deflexão nó 6
12.000	0.0000	0.0000	Inclinação nó 6

Comparando os valores, percebe-se uma validação do resultado obtido pelo algoritmo, ou seja, é interessante o estudo dos elementos finitos em SciLab em decorrência da velocidade de aplicação e simplicidade.

#### VI. Agradecimentos

Os autores agradecem as contribuições de Edgar Nobuo Mamiya que coordenou inicialmente este trabalho.

Agradeço também aos professores Jorge Luiz A. Ferreira e Dianne M. Vianna, pelo auxílio no desenvolvimento deste trabalho. Este trabalho foi desenvolvido em uma colaboração entre o Laboratório de Mecânica dos Sólidos Computacional ( Grupo GAMMA) e o Grupo de Dinâmica de Sistemas (GDS) ambos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília.

#### VII. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Reddy, J. N., (1993), "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill, 2nd edition, chap. 4, pp. 143-198.
- [2] Young, W. K., Hyochoong, B., (1997), "The Finite Element Method using Matlab", CRC Press LLC, chap. 8: Beam and frame structures, pp. 235-304.
- [3] Rao, J. S., (1996), "Rotor Dynamics".
- [4] Rao, J. S., (1984), "Theory and Practice of Mechanical Vibrations", "Holzer Method for closed coupled systems", pp. 281-291.
- [5] Alberto, C. S., Teixeira, L. P., (1994), "Introdução ao Método dos Elementos Finitos", Grupo de Análise de Tensões do Departamento de Eng. Mecânica, UFSC.
- [6] Beer, F. P., Johnston, E. R., (1989), "Resistência dos Materiais", McGraw-Hill, pp. 113-16