



**SNPTEE  
SEMINÁRIO NACIONAL  
DE PRODUÇÃO E  
TRANSMISSÃO DE  
ENERGIA ELÉTRICA**

GOP 21  
14 a 17 Outubro de 2007  
Rio de Janeiro - RJ

## **GRUPO IX**

### **GRUPO DE ESTUDO DE OPERAÇÃO DE SISTEMAS ELÉTRICOS - GOP**

#### **MÉTODO DE PONTOS INTERIORES PARA O MODELO DE OTIMIZAÇÃO A USINAS INDIVIDUALIZADAS**

**Anibal Tavares de Azevedo \***

**Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira**

**Secundino Soares Filho**

**UNESP**

**UNICAMP**

**UNICAMP**

## **RESUMO**

O planejamento da operação energética (POE) envolve a determinação da geração hidráulica e térmica em base mensal para um período de até cinco anos visando atender o mercado e minimizar o custo esperado de operação do sistema. Uma abordagem promissora para o POE se baseia na solução do problema em sua versão determinística, alimentado por vazões previstas. Nessa abordagem, o POE se apresenta como um problema de programação não linear devido à característica da geração hidráulica e dos custos operacionais, e é resolvido por um método de pontos interiores que explora a estrutura esparsa do problema.

O método foi testado em três estudos de caso considerando períodos de planejamento de 10 anos. O primeiro consiste em um sistema hidrotérmico composto por uma única usina hidrelétrica, a usina de Furnas, o segundo é um sistema de 15 usinas localizadas na cascata do Rio Grande, e o terceiro corresponde a uma configuração do Sistema Interligado Nacional (SIN), com 74 usinas hidrelétricas. Dessa forma, por comparação entre as características da solução nos três estudos de caso, foi comprovada a robustez e a eficiência do método proposto.

## **PALAVRAS-CHAVE**

Planejamento da operação energética, modelo de otimização a usinas individualizadas,, programação não-linear, métodos de pontos interiores.

### **1.0 - INTRODUÇÃO**

O planejamento da operação energética (POE) envolve a determinação da geração hidráulica e térmica em base mensal para um período de até cinco anos visando atender o mercado e minimizar o custo esperado de operação do sistema. O POE é um problema estocástico uma vez que as vazões futuras não são conhecidas. Para a sua solução, entretanto, ao invés de utilizar metodologias baseadas em programação dinâmica estocástica, que necessariamente requerem simplificações devido à “maldição da dimensionalidade” (2), alternativas baseadas em modelos de otimização a usinas individualizadas (MOUI) determinísticos têm sido sugeridas com sucesso (6,12).

Para sistemas hidrotérmicos de grande porte como o brasileiro, o MOUI determinístico se torna um problema complexo de programação não-linear cuja solução requer métodos matemáticos que explorem a características particulares do problema. Alguns métodos têm sido sugeridos, incluindo programação não-linear (9) e fluxo em redes (5, 11, 14, 16, 18).

Mais recentemente, técnicas baseadas em métodos de pontos interiores (MPI) têm sido aplicadas ao MOUI (8, 13, 15). Em (15) um método dual-afim é implementado para resolver uma versão linear do MOUI. Em (8) um código

(\*) Av. Dr. Ariberto Pereira da Cunha, 333 – Portal das Colinas - Departamento de Matemática - sala 21 – CEP 12516-410 - Guaratinguetá, SP – Brasil

Tel: (+55 12) 3123-2848 – Fax: (+55 12) 3123-2845 – Email: anibal@feg.unesp.br

comercial assume que a função de produção hidráulica é linear por partes. Em (13), o problema é resolvido assumindo também uma modelagem linear do MOUI.

MPIs são especialmente eficientes para problemas de otimização de grande porte. O primeiro MPI foi desenvolvido por Dikin (7) em 1967. A aplicação de MPIs para resolver problemas de programação linear foi proposta por Karmarkar (10) em 1984 e com os resultados apresentados em 1989, desde então os MPIs foram extensivamente desenvolvidos e aplicados em diversos problemas de otimização, inclusive otimização não-linear (1).

Este trabalho apresenta um MPI eficiente e robusto, capaz de resolver o MOUI em sua versão não-linear para um sistema de grande porte, o SIN. O MOUI foi formulado de forma precisa considerando a função de produção hidráulica e os custos operacionais como funções não lineares. O modelo matemático e a notação utilizada no mesmo estão descritos na Seção 2. A Seção 3 apresenta uma descrição breve do método, enquanto a Seção 4 mostra a aplicação do método em três estudos de caso diferentes, identificando as características das soluções encontradas e seus aspectos comuns. Por fim, a Seção 5 apresenta as conclusões do trabalho.

## 2.0 - NOTAÇÃO E MODELAGEM MATEMÁTICA

A seguinte notação será adotada no modelo do MOUI:

$t$	- Índice de mês.
$T$	- Número de meses no período de planejamento.
$i$	- Índice de usina hidrelétrica.
$N$	- Número de usinas hidrelétricas.
$\Omega_i$	- Conjunto de índices das usinas imediatamente a montante da usina hidrelétrica $i$ .
$\Psi_t$	- Função de custo de complementação termelétrica (Reais).
$H_t$	- Função de geração hidrelétrica (MW).
$D_t$	- Mercado (MW).
$r_{it}$	- Volume armazenado no reservatório ( $\text{hm}^3$ ).
$\underline{r}_{i,t}, \bar{r}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de armazenamento do reservatório.
$q_{i,t}$	- Vazão turbinada ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
$\underline{q}_{i,t}, \bar{q}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de vazão turbinada.
$v_{i,t}$	- Vazão vertida ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
$\underline{v}_{i,t}, \bar{v}_{i,t}$	- Limites mínimo e máximo de vazão vertida.
$k_i$	- Produtibilidade específica ( $\text{MW}/\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$ ).
$\phi_i$	- Polinômio da cota de montante (m).
$\theta_i$	- Polinômio da cota de jusante (m).
$\zeta_i(q_{i,t})$	- Perda hidráulica (m).
$y_{it}$	- Vazão afluente incremental ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
$\Delta t_t$	- Número de segundos do mês dividido por $10^6$ .

O MOUI pode ser formulado pelo seguinte problema de programação não-linear:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T \Psi_t (D_t - H_t) \quad (1)$$

$$\text{st :} \quad H_t = \sum_{i=1}^N k_i \left( \phi_i \left( \frac{r_{i,t} + r_{i,t-1}}{2} \right) - \theta_i (q_{i,t} + v_{i,t}) - \zeta_i (q_{i,t}) \right) q_{i,t} \quad (2)$$

$$\frac{r_{i,t} - r_{i,t-1}}{\Delta t_t} = \sum_{j \in \Omega_i} (q_{j,t} + v_{j,t}) - (q_{i,t} + v_{i,t}) + y_{i,t} \quad (3)$$

$$\underline{r}_{i,t} \leq r_{i,t} \leq \bar{r}_{i,t} \quad (4)$$

$$q_{i,t} \leq \bar{q}_{i,t} \quad (5)$$

$$\underline{u}_{i,t} \leq q_{i,t} + v_{i,t} \quad (6)$$

$$v_{i,t} \geq 0 \quad (7)$$

$$\forall t, t = 2, 3, \dots, T, \forall i, i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

onde os volumes armazenados iniciais  $r_{i,1}, \forall i, i = 1, 2, \dots, N$  são dados. A função objetivo da Equação (1) minimiza o custo operacional  $\Psi_t$  do sistema, dado pelo menor custo de complementação termelétrica, considerando importação de sistemas vizinhos e corte de carga como térmicas fictícias. O custo operacional é obtido, portanto, a partir do despacho econômico das fontes de complementação não hidráulicas.

A geração hidráulica no estágio t é uma função não-linear representada pela Equação (2). As restrições de igualdade da Equação (3) representam as equações de balanço de água para cada reservatório em cada mês t, onde  $y_{i,t}$  é a vazão afluente incremental. Outros efeitos como evaporação e infiltração não foram considerados por simplicidade de apresentação. Limites inferiores e superiores das variáveis expressos nas restrições dadas pelas Equações (4)-(7), são impostos pelas restrições operacionais das usinas hidráulicas, assim como restrições relacionadas aos usos múltiplos da água, tais como irrigação, navegação e controle de cheias.

### 3.0 - TÉCNICA DE SOLUÇÃO

Para poder aplicar o método de pontos interiores à formulação proposta pelo modelo das Equações (1)-(7), a formulação matricial (8) foi construída:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{s.a. :} \quad & Ax = b \quad (8) \\ & \underline{x} \leq x \leq \bar{x}. \end{aligned}$$

Observe que a função objetivo não-linear foi obtida a partir da composição das Equações (1) e (2). A restrição de igualdade  $Ax = b$  representa as equações de conservação de água descritas pela Equação (3). Finalmente os limites operacionais dados pelas Equações (4)-(7) estão expressas pela canalização da variável x em (8).

A chave para a rapidez e robustez do MPI desenvolvido está na exploração da estrutura matricial particular da matriz A e na manipulação da matriz Hessiana  $H(x)$  associada à função objetivo  $f(x)$ . Para aumentar o desempenho computacional, apenas os elementos da diagonal da matriz  $H(x)$  são considerados. Isto, porém, poderia fazer com que a matriz  $H(x)$  fosse indefinida, acarretando problemas de convergência do método, sendo este problema contornado através de uma modificação do procedimento proposto em (1). Para maiores detalhes sugere-se a referência (3).

## 4.0 - RESULTADOS

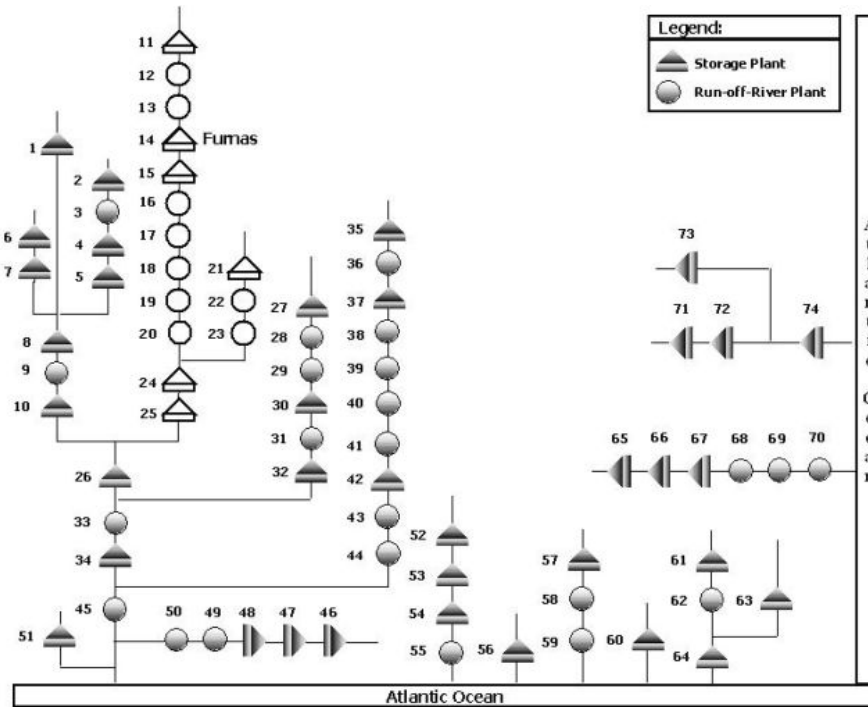
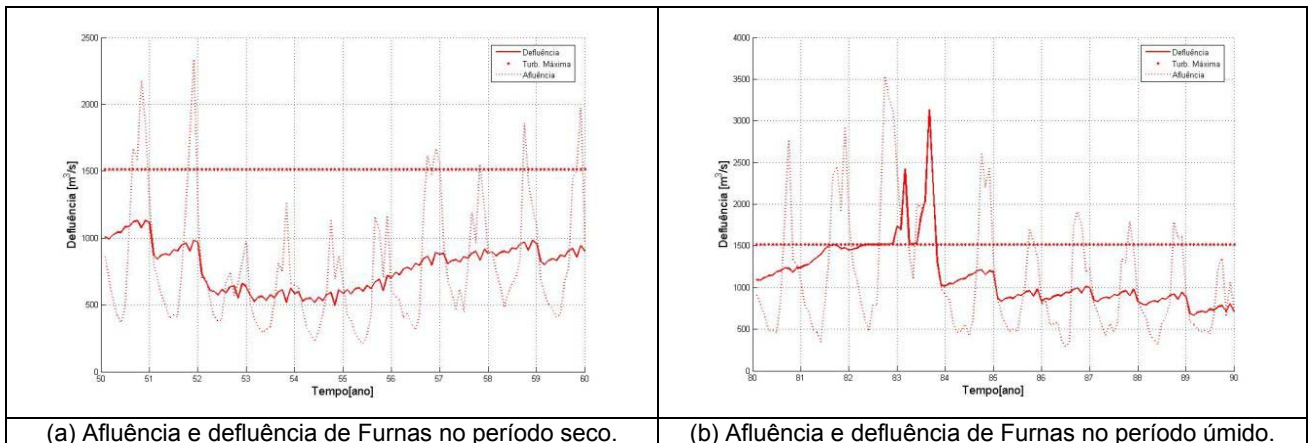


FIGURA 1: Usinas hidráulicas do sistema elétrico brasileiro.

O método proposto foi testado para três diferentes casos que diferem em relação ao número de hidrelétricas consideradas. O primeiro estudo de caso, com uma única usina com reservatório, permite a análise detalhada da solução. A usina de Furnas foi selecionada, pois tem o reservatório mais importante na cabeceira da cascata do Rio Grande, uma das mais importantes do sistema elétrico brasileiro. O segundo estudo de caso engloba toda a cascata do Rio Grande (incluindo o Rio pardo) e é composto por 15 usinas hidrelétricas, 6 com reservatório e 9 a fio-d'água, representando uma capacidade instalada de 7.816 MW. O terceiro estudo de caso corresponde a maior parte do sistema hidrelétrica brasileiro com 74 usinas, 42 com reservatório e 32 fio-d'água, correspondendo a uma capacidade instalada de 65.667 MW.

Para cada estudo de caso a demanda foi considerada constante durante o período de planejamento e igual a capacidade hidráulica instalada, de forma a manter aproximadamente a mesma proporção hidrotérmica em todos os estudos. Como função de custo operacional foi adotada uma função quadrática que representa aproximadamente o custo da complementação térmica do sistema elétrico brasileiro, dada por  $\Psi_t = 0.02(D_t - H_t)^2$ .

A Figura 1 ilustra a topologia do sistema hidrelétrico brasileiro. O reservatório de Furnas é representado como a usina de número 14 na cascata do Rio Grande (incluindo o Rio Pardo) composta pelas usinas de número de 11 até 25. Todas as informações necessárias para os estudos de caso podem ser obtidas em: <http://www.ccee.org.br/precos/downloads/index.jsp>.



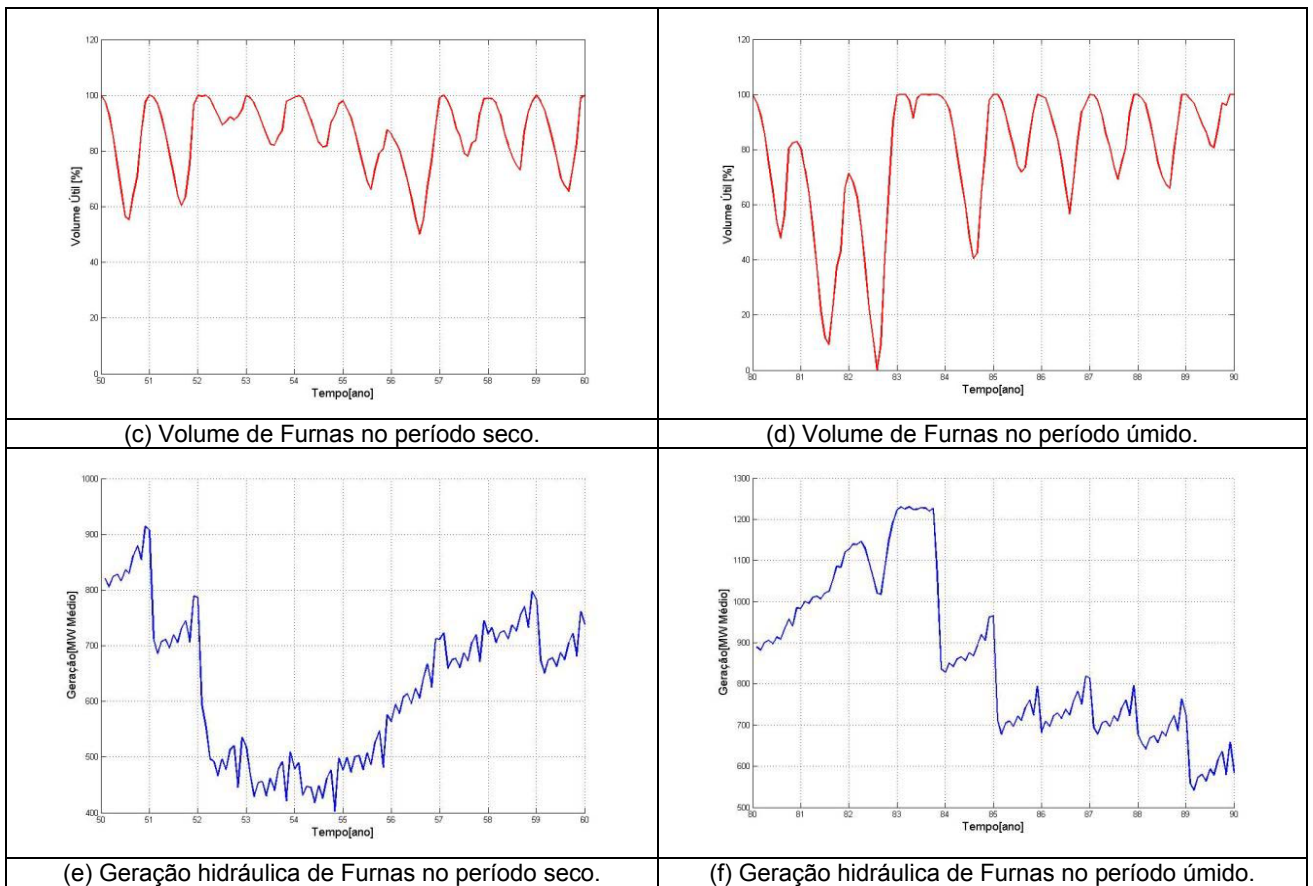


FIGURA 2: Operação da usina de Furnas para períodos seco e úmido.

Os dois períodos de planejamento de 10 anos foram selecionados, um incluindo o período mais seco (seqüência de aflúências mais baixa) correspondente aos anos da década de 50, e outra incluindo o período mais úmido (seqüência de aflúências mais alta) da década de 80. A consideração de períodos de planejamento longos, acima do usual período de planejamento de 5 anos, teve por finalidade ajudar na compreensão do comportamento da solução ótima para diferentes cenários.

A solução ótima para o primeiro caso, assumindo as aflúências da década de 50, corresponde às trajetórias de defluência (turbinação), armazenamento e geração, que são apresentadas nas Figuras 2-(a), 2-(c) e 2-(e). Quando a defluência excede a máxima turbinação, o excesso é vertido. Esta é uma característica do despacho hidráulico ótimo, pois é sempre preferível turbinar a verter. Assim, a trajetória de defluência da Figura 2-(a), ocorrendo sempre abaixo da turbinação máxima, representa também a trajetória de turbinação ótima, uma vez que essa solução não apresentou vertimento.

Na Figura 2-(c), a trajetória do armazenamento ótimo da usina de Furnas alcançou o máximo quase todos os anos no início de cada período seco (Maio). Isso ocorre porque a solução procura manter o reservatório tão cheio quanto possível de forma a maximizar a altura de queda e conseqüentemente a eficiência do processo de conversão de energia potencial hidráulica em energia elétrica. Por outro lado, a defluência média anual em geral acompanha a aflúência média anual, restringindo a regulação das aflúências ao ano hidrológico e segmentando o problema de otimização plurianual em problemas de otimização independentes para cada ano. Assim, cada vez que o reservatório atinge o máximo, uma nova otimização é iniciada, como pode ser perfeitamente identificado através da mudança abrupta da trajetória ótima observada em Maio de 1951 e de 1952, quando o reservatório enche e opera como uma usina a fio d'água. Quando anos de baixa aflúência são sucedidos por anos de alta aflúência, como ocorreu entre Maio de 1955 e Maio de 1957, a otimização compreende períodos maiores que um ano, razão pela qual o reservatório não chega ao seu valor máximo no início do período seco, como ocorreu em Maio de 1956.

Olhando para cada período de otimização entre dois intervalos consecutivos onde o armazenamento de água atinge o máximo, pode ser notado que a trajetória de defluência ótima apresenta uma variação muito menor que a trajetória de aflúência. Isso se deve à função objetivo quadrática, que penaliza oscilações na geração térmica. Por outro lado, observa-se um pequeno crescimento na defluência ao longo do ano, que se deve ao efeito da cota de montante na produtividade da geração hidráulica. Assim, um pequeno crescimento da defluência é preferível a uma defluência constante, pois acarreta uma trajetória de armazenamento ligeiramente mais alta.

As Figuras 2-(b), 2-(d) e 2-(f) mostram a solução ótima para o estudo de caso 1 com as afluições da década de 80. Como se observa, a solução para os últimos 6 anos dessa década se assemelha à solução da década de 50. Para os primeiros 4 anos, porém, correspondentes ao período mais úmido do histórico de vazões, a solução tenta reduzir ao máximo o armazenamento na véspera da cheia com a finalidade de evitar vertimentos. Esta redução chega ao ponto de fazer com que o reservatório atinja seu mínimo armazenamento em Novembro de 1982. Mesmo assim, a quantidade de água afluenta que chega deste momento até abril de 1984 é tão grande que a solução é incapaz de impedir a ocorrência de vertimento.

As Figuras 2-(e) e 2-(f) mostram as trajetórias de geração do primeiro estudo de caso, para as décadas de 50 e 80. Deve-se notar que as trajetórias de geração apresentam um padrão de comportamento similar ao mostrado pelas trajetórias de defluência descritas nas Figuras 2-(a) e 2-(b).

O estudo de caso 1, com uma única usina, foi apresentado com o objetivo de destacar as características da solução hidráulica ótima do MOUI. A solução procura minimizar o vertimento, que representa um desperdício de água, mas também procura maximizar o armazenamento, que representa um aumento da eficiência de conversão hidráulica e, portanto, da energia hidrelétrica gerada. A regularização das afluições é normalmente limitada a cada ano hidrológico, com um ligeiro crescimento da geração hidráulica ao longo do ano, e apresentando saltos abruptos entre anos hidrológicos consecutivos.

As Figuras 3-(a) e 3-(b) mostram a trajetória de geração hidráulica para o segundo estudo de caso, durante as décadas de 50 e 80. Note que o perfil das curvas é similar aos apresentados no primeiro estudo de caso, refletindo o fato de que o comportamento da geração da cascata do rio Grande segue o comportamento da geração da usina de Furnas, seu principal reservatório de cabeceira.

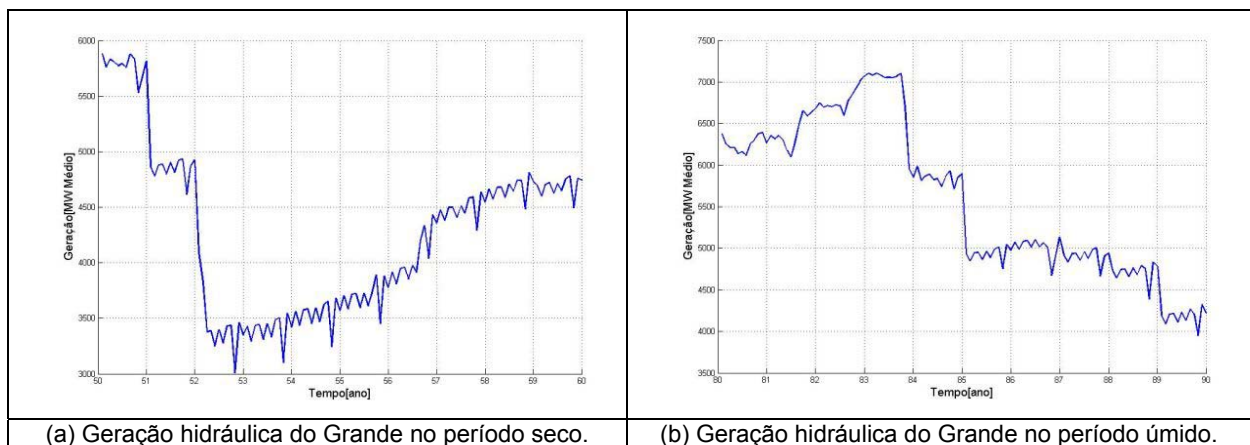


FIGURA 3: Trajetórias de Geração da cascata do rio Grande.

As Figuras 4-(a) e 4-(b) mostram as trajetórias de geração para o terceiro estudo de caso, também para as décadas de 50 e 80. De novo, as curvas resultantes são similares àquelas obtidas nos estudos de caso anteriores, indicando agora a importância da cascata do Rio Grande no contexto do SIN.

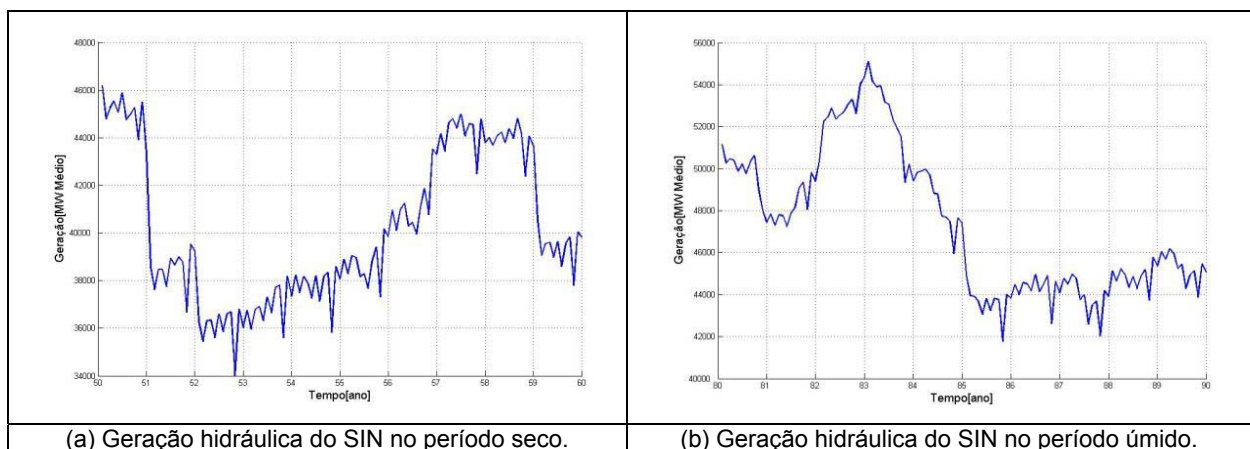


FIGURA 4: Trajetórias de Geração para a cascata do Grande.

Os resultados foram obtidos pelo MPI proposto implementado em Matlab 6.1, numa máquina com processador Intel Pentium 1.5 GHz, 256 Mb de RAM, e sob o Windows 2000 Professional. A Tabela 1 mostra os números das usinas hidrelétricas consideradas em cada estudo de caso e a dimensão do correspondente problema MOUI.

TABELA 1

Estudo de caso	Usinas Hidrelétricas	Variáveis	Restrições de igualdade	Capacidade instalada [MW]
1	15	360	120	1.312
2	11-26	5.400	1.800	7.816
3	1-74	26.640	8.880	65.667

O tempo computacional e o número de iterações do MPI para todos estes estudos de caso são fornecidos pela Tabela 2. Em geral, o tempo computacional e o número de iterações para as décadas de 50 e 80 é similar, sendo ligeiramente maior para a década de 80 em casos com menor número de usinas.

TABELA 2

Estudo de Caso	Período	Tempo(s)	Iterações
1	1950s	3,53	20
	1980s	4,22	24
2	1950s	13,98	31
	1980s	19,75	45
3	1950s	336,47	89
	1980s	333,51	89

Para o terceiro estudo de caso, que corresponde a 10 anos de horizonte de planejamento e quase a totalidade das usinas do SIN (74 usinas sendo 42 com reservatório), resultou em um problema com 26.640 variáveis, 8.800 restrições de igualdade e 44.400 restrições de desigualdade, que foi resolvido em menos de 6 minutos.

## 5.0 - CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um modelo de otimização a usinas individualizadas para o planejamento da operação energética, resolvido por método de pontos interiores. O modelo foi formulado como um problema de programação não-linear, permitindo a representação precisa das funções de geração hidráulica e de custos operacionais. O modelo foi testado em três diferentes estudos de caso, um somente com a usina de Furnas, outro com as usinas da cascata do rio Grande, e finalmente o último com uma configuração do SIN. Foram também considerados dois períodos hidrológicos distintos, o primeiro correspondente à década de 50 (seco) e o segundo correspondente à década de 80 (úmido). No primeiro estudo de caso, a solução foi analisada detalhadamente e comprovada sua otimalidade. Nos demais estudos de caso, a trajetória de geração hidráulica foi comparada com a solução do primeiro estudo de caso, indicando um perfil similar e mostrando que o comportamento da usina de Furnas prevalece na cascata do rio Grande, e esta por sua vez prevalece no SIN. Os resultados indicam que o método proposto permite obter a solução do modelo de otimização a usinas individualizadas com robustez e eficiência.

## 6.0 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) A. Altman and J. Gondzio, *Regularized Symmetric Indefinite Systems in Interior Point Methods for Linear and Quadratic Optimization*, Optimization Methods and Software, Vol. 11, No. 12, pp. 275-302, 1999.
- (2) R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1962.
- (3) A.T. Azevedo, *Métodos de Pontos Interiores Aplicados em Sistemas de Potência Modelados por Fluxo em Redes*, Tese de Doutorado – FEEC – UNICAMP – Brasil, 2006.
- (4) A.A.F.M. Carneiro, S. Soares and P.S. Bond, *A Large Scale Application of an Optimal Deterministic Hydrothermal Scheduling Algorithm*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 1, pp. 204-211, 1990.
- (5) M.F. Carvalho and S. Soares, *An Efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 3, pp. 537-542, 1987.
- (6) R. S. Dembo, *Scenario optimization*, Annals of Operations Research, pp. 63–80, 1991.
- (7) I. I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming*, Soviet Math. Doklady., vol. 8, no. 1, pp. 674–675, 1967.
- (8) M. Christoforidis, M. Aganagic, B. Awobamise, S. Tong, and A. F. Rahimi, *Long-term / mid-term resource optimization of a hydrodominant power system using interior point method*, IEEE Trans. on Power Syst., vol. 11, no. 1, pp. 287–294, 1996.
- (9) M. A. Hanscom, L. Lansdom, and G. Provonost, *Modeling and resolution of the medium term energy generation planning problem for a large hydroelectric system*, Management Science., vol. 26, no. 7, pp. 659–668, 1980.

- (10) N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, *Combinatorica*, vol. 4, pp. 373–395, 1984.
- (11) C. Lyra, H. Tavares, *A Contribution to the Midterm Scheduling of Large Scale Hydrothermal Power Systems*, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 3, No. 3, pp. 852-857, 1988.
- (12) L. Martinez and S. Soares, *Comparison Between Closed-Loop and Partial Open-Loop Feedback Control Policies in Long Term Hydrothermal Scheduling*, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 17, No. 2, pp. 330-336, 2002.
- (13) J. Medina, V. Quintana and A. Conejo, *A Clipping-off Interior-Point Technique for Medium-Term Hydro-Thermal Coordination*, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 14, No. 1, pp. 266-273, 1999.
- (14) G.G. Oliveira and S. Soares, *A Second-Order Network Flow Algorithm for Hydrothermal Scheduling*, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 10, No. 3, pp. 1635-1641, 1995.
- (15) K. Ponnambalam, V. H. Quintana, and A. Vannelli, "A fast algorithm for power system optimization problems using an interior point method," *IEEE Trans. on Power Syst.*, vol. 7, no. 2, pp. 659–668, 190.
- (16) R. E. Rosenthal, *A Nonlinear Network Flow Algorithm for Maximization of Benefits in a Hydroelectric Power System*, *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, pp. 763-785, 1981.
- (17) S. Soares, A.A.F.M. Carneiro, *Optimal Operation of Reservoir for Electric Generation*, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 6, No. 3, pp. 1101-1107, 1991.
- (18) D. Sjelvigren, S. Anderson, T. Anderson, U. Nyberg and T. S. Dillon, *Optimal Operations Planning in a Large Hydro-Thermal Power System*, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-102, No. 11, pp. 3644-3651, 1983.
- (20) S..J. Wright, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, Philadelphia, PA: SIAM Publications, 1996.

## 7.0 - DADOS BIOGRÁFICOS

Anibal Tavares de Azevedo

Nascido no Rio de Janeiro, RJ em 1977.

Doutorado (2006) e Mestrado (2002) em Engenharia Elétrica; Graduação em Matemática Aplicada: Unicamp – Campinas;

Empresa: Unesp - Guaratinguetá, desde 2007.

Professor do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – Unesp.

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

Nascido em Ituiutaba, MG, em 1962.

Doutorado (1997) em Matemática Aplicada: Rice University – Houston; Mestrado (1989) em Engenharia Elétrica: Unicamp – SP; Graduação (1985 e 1986) em Física e Ciência da computação: Unicamp-Campinas.

Empresas: CPFL (1987-1990).

Unicamp, desde 2002.

Professor do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Unicamp.

Secundino Soares Filho

Nascido em Santos, SP, em 1949.

Doutorado (1978) e Mestrado (1974) em Engenharia Elétrica: Unicamp – Campinas; Graduação (1972) em Engenharia Mecânica: ITA – São José dos Campos.

Empresa: Unicamp, desde 1976.

Professor da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Unicamp.